Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 20. Juni 2016

Analysis II für Lehramt

11. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 27.06.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) a) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ folgende Abschätzungen:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,, \quad \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty\,, \quad \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2\,.$$

Zeigen Sie mit geeigneten Beispielen, dass diese Abschätzungen bestmöglich sind.

b) Skizzieren Sie in der Ebene die sogenannten *Einheitskugeln*:

$$B_2 := \{\, x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \le 1 \,\}\,, \quad B_1 := \{\, x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 \le 1 \,\}\,,$$
$$B_\infty := \{\, x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \le 1 \,\}\,.$$

2) a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ (Maximumnorm), $\|\cdot\|_1$ (L^1-Norm) und $\|\cdot\|_2$ (L^2-Norm) tatsächlich Normen auf $C[a,b]$ sind (vgl. Beispiel 8.1.3 (b)).

b) Zeigen Sie für $f \in C[a,b]$ die Abschätzungen

$$\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \le (b-a)\|f\|_\infty\,.$$

c) Zeigen Sie, dass es keine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für alle $f \in C[a,b]$ gilt

$$\|f\|_\infty \le M\|f\|_1\,.$$

Betrachten Sie dazu eine geeignete Folge von „Dachfunktionen“.

3) a) Es sei X ein normierter Raum (z.B. $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm) und $x_0 \in X$ (z.B. $x_0 =$ Paris). Dann definieren wir $d_*\colon X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d_*(x,y) := \|x - x_0\| + \|x_0 - y\|$, falls x, y und x_0 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen und im anderen Fall durch $d_*(x,y) := \|x-y\|$. Zeigen Sie, dass d_* eine Metrik auf X ist und fertigen Sie eine Skizze an. Man nennt diese Metrik auch die *Metrik des französischen Eisenbahnsystems.*

b) Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $x_0 \in M$. Dann definieren wir $\sigma\colon M \times M \to \mathbb{R}$ durch $\sigma(x,y) := d(x,x_0) + d(x_0,y)$, falls $x \ne y$ und $\sigma(x,y) := 0$, falls $x = y$. Zeigen Sie, dass σ eine Metrik auf M ist.

c) Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann definieren wir $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik auf M ist. Überlegen Sie sich dazu zunächst, dass die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(t) := \frac{t}{1+t}$ streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$ ist.

d) Ist es sinnvoll, in einem metrischen Raum, den Begriff einer *beschränkten Menge* zu definieren? Wie lautet die Antwort in einem normierten Raum?