TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DR. CHRISTOPHER CLASSEN

Dortmund, 13. Juni 2016

Analysis II für Lehramt

10. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 20.06.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Bestimmen Sie die Taylorreihen folgender Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie jeweils das größte Intervall $(-\rho, \rho)$ auf dem die Taylorreihe gegen die Funktion f konvergiert:

   a) $f(x) := \cosh x$

   b) $f(x) := \sinh x$

   c) $f(x) := \arcsin x$

   d) $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$

2) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^x \sin x$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f(x, 0)$.

   Hinweis: Rechnen Sie geschickt!

3) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

   Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_k gibt mit $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ für alle $x \neq 0$. Folgern Sie hieraus, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet folglich die Taylorreihe $Tf(x, 0)$ von f um $x_0 = 0$? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $Tf(x, 0)$ und für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $Tf(x, 0)$ gegen $f(x)$?

4) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{x^2 \sin 2x}$$

   sofern er existiert. Schreiben Sie dazu jeweils den Zähler und Nenner des Bruches als Summe eines Taylorpolynoms geeigneter Ordnung und des zugehörigen Restgliedes. Wenn Sie wollen: Vergleichen Sie den Aufwand mit der Regel von de l'Hospital.