Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 6. Juni 2016

Analysis II für Lehramt

9. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 13.06.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Bestimmen Sie jeweils das Konvergenzintervall folgender Potenzreihen und untersuchen Sie die Konvergenz in den Randpunkten:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k \cdot 3^k}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^a \cdot a^k}$ $(a > 0)$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{(3+2(-1)^k)k}\, x^k$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, (x-1)^{2k}$

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{8^k+5}\, x^{3k+1}$

2) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$.

   a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei T_n das n-te Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$. Bestimmen Sie T_n und zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung
   $$|f(x) - T_{2n}(x)| = |f(x) - T_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

   b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei jetzt T_n das n-te Taylorpolynom von f um $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie T_2 und T_3 und finden Sie eine Abschätzung für $|f(x) - T_2(x)|$ und $|f(x) - T_3(x)|$.

3) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\sin x}$ und T_2 das zweite Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$. Bestimmen Sie T_2 und zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|f(x) - T_2(x)| \le C|x|^4$ mit einer Konstanten $C > 0$. Versuchen Sie, die Abschätzung mit $C = \frac{5}{8}$ herzuleiten. Dies ist allerdings etwas trickreich.

4) Es sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Summenfunktion einer Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Zeigen Sie:

   a) f ist eine gerade Funktion genau dann, wenn $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   b) f ist eine ungerade Funktion genau dann, wenn $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.