Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 30. Mai 2016

Analysis II für Lehramt

8. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 06.06.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Es sei (f_n) eine Funktionenfolge auf dem Intervall $[0,\infty)$, die auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvergiert und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Bleibt die Aussage richtig, wenn man nur punktweise Konvergenz voraussetzt.

2) Es sei (f_n) eine Funktionenfolge auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig auf I gegen f genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in I gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

3) Untersuchen Sie, auf welchen Intervallen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ folgende Funktionen f und g stetig differenzierbar sind:

   a) $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^3}$

   b) $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k \cos kx}{k^3}$

4) Untersuchen Sie folgende Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x}{k(1+kx^2)}$ auf $\mathbb{R}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}$ auf $\mathbb{R}$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{kx}{1+k^4x^2}$ auf $[q,\infty)$ mit $q > 0$