Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 23. Mai 2016

Analysis II für Lehramt

7. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 30.05.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz auf I und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion. Fertigen Sie auch Skizzen an.

   a) $f_n(x) := ne^{x-nx^2}, \quad I = \mathbb{R}$

   b) $f_n(x) := \dfrac{nx^2}{1+nx^3}, \quad I = [0,1]$ bzw. $I = I_\delta = [\delta, 1]$ mit $0 < \delta < 1$

   c) $$f_n(x) := \begin{cases} n^2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2x & \text{für } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 2, \end{cases} \quad I = [0,2]$$

   d) $$f_n(x) := \begin{cases} x - n + 1 & \text{für } n-1 \leq x \leq n, \\ n + 1 - x & \text{für } n < x < n+1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \quad I = \mathbb{R}$$

2) Es sei (f_n) eine Funktionenfolge auf dem Intervall $[0,1]$, die auf $[0,1]$ punktweise gegen die Grenzfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) Sind alle f_n monoton wachsend auf $[0,1]$, so ist auch f monoton wachsend auf $[0,1]$.

   b) Sind alle f_n beschränkt auf $[0,1]$, so ist auch f beschränkt auf $[0,1]$.

   c) Sind alle f_n beschränkt auf $[0,1]$ und konvergiert (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f, so ist auch f beschränkt auf $[0,1]$.

3) a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion und (τ_n) eine reelle Nullfolge. Weiter sei die Funktionenfolge (f_n) auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := f(x + \tau_n)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

   b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, (g_n) eine Funktionenfolge auf $\mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen g konvergiert und (τ_n) eine reelle Nullfolge. Weiter sei die Funktionenfolge (f_n) auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := g_n(x + \tau_n)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen g konvergiert.