Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 17. Mai 2016

Analysis II für Lehramt

6. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 23.05.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)(\log\log k)^{\alpha}}$$

konvergiert. Versuchen Sie, das Ergebnis zu verallgemeinern.

2) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ konvergiert und für den Reihenwert s die Abschätzung $\frac{\pi}{4} \leq s \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ gilt.

3) Zeigen Sie, dass für alle z, $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}\,.$$

Dabei steht auf der linken Seite das Cauchyprodukt der beiden Reihen.

4) Es sei (a_k) eine monoton fallende Folge reeller Zahlen.

   a) Zeigen Sie: Ist die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} k a_k = 0$.

   b) Gilt auch die Umkehrung der Aussage in (a)?

   c) Kann man in (a) die Voraussetzung der Monotonie von (a_k) weglassen?