Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 2. Mai 2016

Analysis II für Lehramt

4. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 09.05.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Zeigen Sie, dass die Funktion $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ in keinem Intervall $(a,b) \subset (0,\infty)$ durch eine rationale Funktion dargestellt werden kann.

   Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt und schauen Sie sich noch einmal den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ an.

2) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und das uneigentlich Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ sei konvergent. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$
   b) f ist beschränkt auf $[0,\infty)$.

3) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ für die folgende Reihen konvergieren und berechnen Sie den Reihenwert:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^{3k+1}$
   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$
   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (7-x^2)^{2k}$

4) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie in Teil (d) auch den Reihenwert:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+2}}$
   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\,\right)$
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{-k}$
   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$