Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 8. Februar 2016

Analysis I für Lehramt

15. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Keine Abgabe, keine Korrektur!

1) Berechnen Sie folgende Grenzwerte sofern sie existieren:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)^\alpha - (1-\alpha x)}{x^2}\,, \quad \alpha > 0$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

2) Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \left\{ \frac{k}{n} : k = 0, 1, \ldots, n \right\}$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ in n Teilintervalle.

   a) Berechnen Sie die Unter- und Obersumme $U_{Z_n}(f)$ und $O_{Z_n}(f)$.

   b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} U_{Z_n}(f)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} O_{Z_n}(f)$.

   c) Was folgt hieraus für das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$?

3) Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \le x < 0\,, \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f über $[-1,1]$ Riemann-integrierbar ist, aber auf $[-1,1]$ keine Stammfunktion besitzt.

4) Gegeben sei die Stammbrüche-Funktion (vgl. Beispiel vor Satz 3.3.7) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \text{ mit } p,\, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}\,, \\ 1 & \text{für } x = 0\,, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{I}\,. \end{cases}$$

   Untersuchen Sie, ob f Riemann-integrierbar über $[0,1]$ ist und berechnen Sie gegebenenfalls $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Die Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde zu Analysis II für Lehramt im Sommersemester 2016 besprochen.