Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 1. Februar 2016

Analysis I für Lehramt

14. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 08.02.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (7 Punkte)

   a) Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 3x + \cos(\sin 2x)$. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

   b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

2) (10 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x^3 - 2x^2 + 2x - 2)e^x$.

   a) Wie verhält sich f für $x \to \pm\infty$?

   b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

   c) Untersuchen Sie f auf Konvexität, Konkavität und bestimmen Sie die Anzahl der Wendepunkte von f und deren ungefähre Lage.

   d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

   e) Wie viele Nullstellen besitzt f und wo liegen diese ungefähr?

3) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $x > -1$ und alle $\alpha \geq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

4) (4 Punkte) Es sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$.

   a) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt in $[0,1]$ besitzt, d.h. es gibt ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$. Was bedeutet diese Aussage geometrisch?

   b) Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt in $[0,1]$ besitzt, falls f zusätzlich differenzierbar auf $(0,1)$ ist und $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in (0,1)$.