Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 25. Januar 2016

Analysis I für Lehramt

13. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 01.02.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (3 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$.

   b) Ist $f'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$.

   c) Ist f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, so ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2) (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := [x] + \sqrt{x - [x]}$.

   a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend und stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

   b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

   c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

3) (2 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to \left[-e, \frac{1}{e}\right]$ mit $f(x) := xe^{-x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$.

4) (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,1] \setminus \{0\} \to (-1,1]$ mit

$$f(x) := \begin{cases} -x-1 & \text{für } -1 \leq x < 0\,, \\ x & \text{für } 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.

   b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und zeigen Sie, dass f^{-1} in 0 unstetig ist.

   c) Warum sind die Sätze 3.3.18 und 4.2.11 nicht anwendbar?