Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 18. Januar 2016

Analysis I für Lehramt

12. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 25.01.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (2 Punkte) Geben Sie eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht streng monoton ist.

2) (2 Punkte) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f,\ g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Zeigen Sie, dass $f + g$ differenzierbar in x_0 ist und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) (5 Punkte) Untersuchen Sie folgende Funktionen in allen Punkten ihres maximalen Definitionsbereichs auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

   a) $f(x) := \log(2 + \cos x)$
   b) $f(x) := e^x \sin x$
   c) $f(x) := \cos(\log x)$
   d) $f(x) := x^x$
   e) $f(x) := e^{e^x}$
   f) $f(x) := \frac{e^{x^2}-1}{1+|x|}$
   g) $f(x) := \frac{1+\sin x}{5+x^2-\cos x}$
   h) $f(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
   i) $f(x) := x|x|$
   j) $f(x) := |\sin^2 x|$

4) (3 Punkte) Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := xh(x)\,, \quad g(x) := x^2 h(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   a) Zeigen Sie, dass g differenzierbar in 0 ist und bestimmen Sie $g'(0)$.
   b) Geben Sie ein Beispiel einer beschränkten Funktion h an, sodass f nicht differenzierbar in 0 ist.
   c) Geben Sie eine Zusatzbedingung an h an, sodass f differenzierbar in 0 ist und bestimmen Sie $f'(0)$.