

## Analysis I für Lehramt

11. Übungsblatt, WiSe 2015/16

**Abgabe** bis Montag, 18.01.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

- 1) (3 Punkte) Es seien  $H$  die Heavisidefunktion und  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 + 1), \quad g(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 - 1).$$

- Zeigen Sie, dass  $f$  und  $g$  monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$  sind.
  - Bestimmen Sie den rechts- und linksseitigen Grenzwert von  $f$  und  $g$  in  $x_0 = 1$ .
  - Sind  $f$  und  $g$  stetig in  $x_0 = 1$ ?
- 2) (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$ .
- Zeigen Sie, dass  $f$  streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$  ist und bestimmen Sie die Bildmenge  $f(\mathbb{R})$ .
  - Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .
  - Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  und skizzieren Sie den Graphen von  $f^{-1}$ .
- 3) (4 Punkte) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $\mathbb{R}$  und es gelte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
- Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}$  ein Minimum oder ein Maximum annimmt, d.h. es existiert ein  $\xi_1 \in \mathbb{R}$  mit  $f(\xi_1) \leq f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  oder es existiert ein  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \leq f(\xi_2)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion  $f$  an, die auf  $\mathbb{R}$  ein Maximum und ein Minimum annimmt.
  - Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion  $f$  an, die auf  $\mathbb{R}$  zwar ein Maximum aber kein Minimum annimmt.

In (b) und (c) reicht es aus, wenn Sie den Graphen einer solchen Funktion skizzieren. Es ist nicht notwendig, eine Formel anzugeben.

- 4) (3 Punkte)
- Es sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[0, 1]$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$ . Zeigen Sie, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\xi_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$  gibt mit  $f(\xi_n + \frac{1}{n}) = f(\xi_n) + \frac{1}{n}$ .
  - Eine Studentin trinkt auf einer Silversterparty zwischen 20 Uhr am Silvesterabend und 4 Uhr am darauffolgenden Neujahrmorgen insgesamt zwei Liter Sekt. Zeigen Sie, dass es ein Zeitintervall von einer Stunde gibt, in der die Studentin genau 0,25 Liter Sekt trinkt.