

Analysis I für Lehramt

10. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 11.01.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

- 1) (4 Punkte) Die Funktionen $f, g, h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) = \sqrt{x + 1000000} - \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad h(x) = \sqrt{x + \frac{x}{1000000}} - \sqrt{x}.$$

- a) Zeigen Sie $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ für alle $x \leq 10^{12}$.
- b) Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.
- 2) (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x}{2x+5} - \frac{x}{x+1} \right)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)}{(x-1)(x^2-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5} \right)$,
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{x^2+1}{2x^2-1}$.

- 3) (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$.

- 4) (4 Punkte) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf I , wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in I$.

- a) Zeigen Sie, dass jede auf I Lipschitz-stetige Funktion auch stetig auf I ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen \cos und \sin Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} sind.
- c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$ stetig auf \mathbb{R} aber nicht Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} ist.