Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 30. November 2015

Analysis I für Lehramt

7. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 07.12.2015, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

   a) $a_n = \dfrac{3n^2+n+1}{5n^2+4n+(-1)^n}$,

   b) $b_n = (-1)^n \dfrac{5n^3+7n^2}{3n^5+1}$,

   c) $c_n = \dfrac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$,

   d) $d_n = \dfrac{n^4+2^n+3}{2^{n+1}-3n^4}$.

2) (3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

   a) $a_n = \sqrt{n^4+n^2+1} - n^2 - 1$,

   b) $b_n = \dfrac{5n^3+7^n}{3n^5+n!}$,

   c) $c_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

3) (6 Punkte) Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 := \frac{1}{2}$ und $x_{n+1} := x_n^2 + \frac{3}{16}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

   a) Zeigen Sie, dass (x_n) beschränkt ist.

   b) Zeigen Sie, dass (x_n) monoton fallend ist.

   c) Zeigen Sie, dass (x_n) konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

4) (4 Punkte) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge und $S \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

   a) $S = \sup A$.

   b) Für alle $x \in A$ gilt $x \leq S$ und es gibt eine Folge (x_n) in A (d.h. $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$.