Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 23. November 2015

Analysis I für Lehramt

6. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 30.11.2015, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (3 Punkte) Bestimmen Sie für die Folge (x_n) mit

$$x_n := \frac{3n^2 - 2n + 2}{7n^2 + 4}$$

den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

2) (3 Punkte) Geben Sie jeweils zwei Folgen (x_n) und (y_n) an mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ und $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0\,,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1\,,$

c) $\frac{x_n}{y_n} \to \infty \ (n \to \infty)$.

3) (5 Punkte) Es sei (x_n) eine Folge. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend dafür, dass (x_n) eine Nullfolge ist?

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| + |x_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n + x_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

d) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\varepsilon > \varepsilon_0$ und alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n| < \varepsilon$.

e) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n| < \varepsilon$.

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

4) (3 Punkte) Es seien (x_n) und (y_n) zwei reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $0 < x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a < b$.

b) Ist $0 < x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.