Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 16. November 2015

Analysis I für Lehramt

5. Übungsblatt, WiSe 2015/16

Abgabe bis Montag, 23.11.2015, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) (8 Punkte) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 := \frac{1}{z}\,, \quad z_2 := \frac{z-a}{z+a}\,, \quad z_3 := z^3\,, \quad z_4 := \frac{3+5i}{7i+1}\,,$$

$$z_5 := \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\,, \quad z_6 := \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6\,, \quad z_7 := i^n\,, \quad z_8 := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\,.$$

Dabei ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq 8$. Bei z_1 sei $z \neq 0$ und bei z_2 sei $z + a \neq 0$.

2) (6 Punkte) Bestimmen Sie den Betrag und die konjugiert komplexe Zahl der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 := -2 + i\,, \quad z_2 := (2+i)(4+3i)\,, \quad z_3 := \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}\,,$$

$$z_4 := \frac{i}{i+3}\,, \quad z_5 := (1+i)^6\,, \quad z_6 := i^{17}\,.$$

3) (2 Punkte) Es sei $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 + c = z$ höchstens eine Lösung z_0 mit $|z_0| < \frac{1}{2}$ besitzt.

4) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)\,.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.