technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, den 11. 4. 2008

Numerische Integration

Zusammenfassung der Woche 8.4. - 11.4.

Kapitel 1

1.1 Riemann-Integrale

Definition 1
Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei $I^{(\nu)} := [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}$. Das kartesische Produkt

$$Q := I^{(1)} \times I^{(2)} \times \ldots \times I^{(n)}$$

heißt *Quader* mit *Inhalt* $|Q| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ und Durchmesser

$$\delta(Q) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu)^2} = \max_{x,y \in Q} \|x - y\|_2.$$

Definition 2
Z heißt *Zerlegung* des Quaders $Q = I^{(1)} \times \ldots \times I^{(n)}$ (in $p_1 \cdots p_n$ Teilquader $Q_{\mathbf{k}}$), wenn für $\nu = 1, \ldots, n$

$$I^{(\nu)} = [x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}] \cup [x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}] \cup \ldots \cup [x_{p_\nu - 1}^{(\nu)}, x_{p_\nu}^{(\nu)}]$$

und mit $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $1 \le k_\nu \le p_\nu$,

$$Q_{\mathbf{k}} := [x_{k_1 - 1}^{(1)}, x_{k_1}^{(1)}] \times [x_{k_2 - 1}^{(2)}, x_{k_2}^{(2)}] \times \ldots \times [x_{k_n - 1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}].$$

Wir setzen $\delta(Q) := \max_{\mathbf{k}} \delta(Q_{\mathbf{k}})$.

Hilfssatz 1.
Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$ haben $Q_{\mathbf{k}}$ und $Q_{\mathbf{l}}$ keine inneren Punkte gemeinsam und es gilt

$$|Q| = \sum_{\mathbf{k}} |Q_{\mathbf{k}}|.$$

Definition 3
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von Q in Teilquader $Q_{\mathbf{k}}$. Wir setzen dann

$$\begin{array}{ll} M := \sup_{x \in Q} f(x), & m := \inf_{x \in Q} f(x), \\ M_{\mathbf{k}} := \sup_{x \in Q_{\mathbf{k}}} f(x), & m_{\mathbf{k}} := \inf_{x \in Q_{\mathbf{k}}} f(x). \end{array}$$

und definieren als *Ober- bzw. Untersumme*

$$S(Z) := \sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}} |Q_{\mathbf{k}}| \quad \text{bzw.} \quad s(Z) := \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}} |Q_{\mathbf{k}}|.$$

Ober- und Untersumme hängen auch von der Funktion f ab. Daher müsste man eigentlich $S(f, Z)$ und $s(f, Z)$ schreiben.

Wegen $m \leq m_{\mathbf{k}} \leq M_{\mathbf{k}} \leq M$ und Hilfssatz 1 gilt

$$m|Q| \leq s(Z) \leq S(Z) \leq M|Q|.$$

Definition 4
$s := \sup_Z s(Z)$ heißt *unteres Integral*, in Zeichen

$$\underline{\int}_Q f(x)dx := s.$$

Entsprechend $S := \inf_Z S(Z)$ *oberes Integral*, in Zeichen

$$\overline{\int}_Q f(x)dx := S.$$

<u>Achtung:</u> s und S sind wohldefiniert wegen $s(Z) \leq M|Q|$ und $S(Z) \geq m|Q|$.

Hilfssatz 2.
Für je zwei Zerlegungen Z und Z' von Q gilt eine Ungleichung der Form

$$S(Z') \leq S(Z) + c(Z)(M - m)\delta(Z'),$$

wobei $c(Z)$ eine Konstante ist, die nicht von Z' abhängt.

Satz 1.
Sei $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\lim_{i\to\infty} \delta(Z_i) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} s(Z_i) = s \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} S(Z_i) = S.$$

Satz 2.
Für jede Zerlegung Z von Q gilt $s(Z) \leq s \leq S \leq S(Z)$.

Definition 5
$f : Q \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. f heißt *Riemann-integrierbar*, wenn das untere und obere Integral den gleichen Wert haben, $s = S$. Man schreibt dann für $s = S$

$$\int_Q f(x)dx$$

und nennt es *das Riemann-Integral von f.*

Definition 6
Sei Z eine Zerlegung von Q in $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ Teilquader $Q_{\mathbf{k}}$. Die Punktmenge $\Xi \subset Q$ enthalte von jedem $Q_{\mathbf{k}}$ genau ein Element,

$$\Xi = \{\xi_{\mathbf{k}} \in Q_{\mathbf{k}} \mid 1 \leq k_\nu \leq p_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Dann wird

$$\Sigma(Z, \Xi) := \sum_{\mathbf{k}} f(\xi_{\mathbf{k}})|Q_{\mathbf{k}}|$$

eine *Riemannsumme* genannt.

Satz 3.
$f : Q \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jede Folge von Zerlegungen $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ mit $\lim_{i\to\infty} \delta(Z_i) = 0$ und für jede Wahl $\Xi_i = \{\xi_{\mathbf{k}}^{(i)} \in Q_{\mathbf{k}}^{(i)} \mid 1 \leq k_\nu \leq p_\nu^{(i)}\}$ die Folge der Riemannsummen $\{\Sigma(Z_i, \Xi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ gegen den selben Grenzwert konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\lim_{i\to\infty} \Sigma(Z_i, \Xi_i) = \int_Q f(x)dx.$$

Eigenschaften des Riemann-Integrals:
Sei $R(Q)$ die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$. Man kann zeigen

$$f, g \in R(Q) \ \Rightarrow \ f \cdot g \in R(Q)$$

und, falls $g(x) \geq c > 0 \ \forall x \in Q$, dann auch $\dfrac{f}{g} \in R(Q)$.
Die Funktion $I : R(Q) \to R$ mit

$$I(f) := \int_Q f(x)dx$$

ist linear,

$$\begin{array}{lll} I(f+g) & = I(f) + I(g) & \text{für alle} \ \ f, g \in R(Q), \\ I(af) & = aI(f) & \text{für alle} \ \ f \in R(Q), \ a \in \mathbb{R}, \end{array}$$

und sogar positiv,

$$f \in R(Q), \ f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in Q \ \Rightarrow \ I(f) \geq 0.$$

Satz 4.
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemannintegrierbar.

Im Fall $n = 1$ sind auch die Funktionen beschränkter Variation Riemann-integrierbar, insbesondere die monotonen Funktionen.

Bemerkung 1: Der Begriff des Riemann-Integrals wird auch ausgedehnt auf Gebiete Q, die nicht Quader sind. Sind $Q_1, \ldots, Q_s$ Quader im $\mathbb{R}^n$ ohne gemeinsame innnere Punkte, $\dot{Q}_i \cap \dot{Q}_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und ist $f : \tilde{Q} := \bigcup_{i=1}^{s} Q_i \to \mathbb{R}$ auf jedem Q_i Riemann-integrierbar, dann definiert man

$$\int_{\tilde{Q}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{s} \int_{Q_i} f(x)dx.$$

Wir nennen dieses $\tilde{Q} := \bigcup_{i=1}^{s} Q_i$ eine *Quadersumme.*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn für jede Folge von Quadersummen $\{\tilde{Q}_i\}_{i=1}^{\infty}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{Q}_i = D$ die Folge$\{\int_{\tilde{Q}_i} f(x)dx\}_{i=1}^{\infty}$ gegen den selben Grenzwert konvergiert, dann nennt man diesen Grenzwert das Riemann-Integral von f (über D)

$$\int_{D} f(x)dx.$$

Bemerkung 2: Die Geometrie der Zerlegung ging nur in Hilfsatz 2 ein. Man kann daher auch Riemann-Integrale erklären, wenn man nicht Quader in Teilquader zerlegt, sondern etwa im $\mathbb{R}^2$ Dreiecke in Teildreiecke oder auf der Kugeloberfläche $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sphärische Dreiecke oder sphärische Rechtecke in ebensolche Teil-Dreiecke oder -Rechtecke. In jedem Fall hat man dann "nur" noch einen zu Hilfssatz 2 analogen Satz zu beweisen. Diese Beweise führt man ganz analog zum Beweis von Hilfssatz 2.