technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, den 15. 7. 2008

Numerische Integration

14. Übung
MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 47

a) Ansatz für den Repräsentanten $q \in \mathcal{P}_2$, $I(qf) = f(0,0)$ für alle $f \in \mathcal{P}_2$,

$$q(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2.$$

Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrlllllll}
I(q) = & 1 = & 4a_1 & & & +\frac{4}{3}a_4 & & +\frac{4}{3}a_6 \\
I(xq) = & 0 = & & \frac{4}{3}a_2 & & & & \\
I(yq) = & 0 = & & & \frac{4}{3}a_3 & & & \\
I(x^2q) = & 0 = & \frac{4}{3}a_1 & & & +\frac{4}{5}a_4 & & +\frac{4}{9}a_6 \\
I(xyq) = & 0 = & & & & & \frac{4}{3}a_5 & \\
I(y^2q) = & 0 = & \frac{4}{3}a_1 & & & +\frac{4}{9}a_4 & & +\frac{4}{5}a_6
\end{array}$$

Lösung ist $a_1 = \frac{7}{8}$, $a_4 = a_6 = -\frac{15}{16}$ und $a_2 = a_3 = a_5 = 0$. Also

$$q(x,y) = \frac{7}{8} - \frac{15}{16}x^2 - \frac{15}{16}y^2.$$

b) $f \in \mathcal{O}_3(I)$ hat nach Satz 7 die Darstellung

$$f = a_1 P^{(3,0)} + a_2 P^{(2,1)} + a_3 P^{(1,2)} + a_4 P^{(0,3)} \quad \text{mit} \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

und $P^{(i,j)}(x,y) = L_i(x) L_j(y)$ sowie

$$L_0(t) = 1,\ L_1(t) = t,\ L_2(t) = t^2 - \frac{1}{3},\ L_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

Nach Voraussetzung hat f mit q genau 6 gemeinsame Nullstellen.

Annahme. $a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3$ hat mit $-\frac{15}{16}(x^2 + y^2)$ (mindestens) eine Nullstelle $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ gemeinsam.

Wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ist $\beta = -i \cdot \alpha$ und es gilt

$$a_1\alpha^3 - a_2\alpha^3 \cdot i - a_3\alpha^3 + a_4\alpha^3 \cdot i = 0.$$

Wegen $\alpha \neq 0$ und weil die a_i reell sind, folgt

$$a_1 - a_3 = 0, \quad a_2 - a_4 = 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_1\Big(P^{(3,0)} + P^{(1,2)}\Big) + a_2\Big(P^{(2,1)} + P^{(0,3)}\Big) \\ &= a_1\Big(x^3 - \frac{3}{5}x + xy^2 - \frac{1}{3}x\Big) + a_2\Big(x^2y - \frac{1}{3}y + y^3 - \frac{3}{5}y\Big) \\ &= (a_1x + a_2y)(x^2 + y^2 - \frac{14}{15}) \\ &= -\frac{16}{15}(a_1x + a_2y)q(x,y). \end{aligned}$$

Das Polynom f ist dann Null in allen Nullstellen von q, d.h., f und q haben mehr als nur sechs gemeinsame Nullstellen. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch. Nach Satz 10 (Max Noether) bilden f und q eine H-Basis von

$$\mathcal{A} = \{g \in \mathcal{P} \mid g(\xi_i, \eta_i) = 0,\ i = 1, \ldots, 6\ \}.$$

Für jedes $h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}_5$ gibt es daher $h_1 \in \mathcal{P}_2$ und $h_2 \in \mathcal{P}_3$ mit

$$h = h_1 f + h_2 q.$$

Es folgt $I(h) = I(h_1 f) + I(h_2 q)$. Wegen $f \in \mathcal{O}_3(I)$ ist $I(h_1 f) = 0$. Zu zeigen ist $I(h_2 q) = 0$ wenn $h(0,0) = 0$. (Aus $h(0,0) = 0$ folgt wegen $f(0,0) = 0$ nach Voraussetzung, dass $h_2(0,0)q(0,0) = h_2(0,0)\frac{7}{8} = 0$ gilt, also $h_2(0,0) = 0$.)

$h_2 \in \mathcal{P}_3$ lässt sich zerlegen in $h_2 = k_- + k_+$, wobei k_- ein ungerades Polynom vom Grad ≤ 3 und k_+ ein gerades vom Grad ≤ 2 ist. Wegen $k_-(0,0) = 0$ (ungerade!) und $h_2(0,0) = 0$ ist auch $k_+(0,0) = 0$. Weil k_- ungerade ist, q aber gerade, gilt $I(k_- q) = 0$. Wegen $k_+ \in \mathcal{P}_2$ hat man $I(k_+ q) = k_+(0,0) = 0$. Zusammen also

$$I(h_2 q) = I(k_- q) + I(k_+ q) = 0.$$

Insgesamt gilt also für beliebige $h \in \mathcal{P}_5$

$$h(0,0) = h(\xi_i, \eta_i) = 0,\ i = 1, \ldots, 6 \Rightarrow h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}_5, h(0,0) = 0 \Rightarrow I(h) = 0.$$

Wie im Beweis von Satz 9 folgt die Existenz von $a_0, a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{R}$ mit

$$I(h) = a_0 h(0,0) + \sum_{i=1}^{6} a_i h(\xi_i, \eta_i) \quad \forall h \in \mathcal{P}_5.$$

Aufgabe 48
Sei $x_k := \{k\theta\}$, $k \in \mathbb{N}$. Zur Berechnung von $P(x_k > x_{k+1})$ machen wir eine Fallunterscheidung. Weil $0 < (k+1)\theta - k\theta = \theta < 1$ gilt, gibt es nur zwei Fälle.
<u>Fall 1:</u> $n := \lfloor k\theta \rfloor = \lfloor (k+1)\theta \rfloor$.
Hier gilt

$$k\theta = n + \{k\theta\} = n + x_k \quad \text{und} \quad (k+1)\theta = n + \{(k+1)\theta\} = n + x_{k+1}.$$

Daher

$$x_{k+1} - x_k = \theta > 0.$$

<u>Fall 2:</u> $n := \lfloor (k+1)\theta \rfloor = \lceil k\theta \rceil$.
Hier ist

$$k\theta = n - 1 + \{k\theta\} = n - 1 + x_k \quad \text{und} \quad (k+1)\theta = n + \{(k+1)\theta\} = n + x_{k+1}.$$

Also

$$x_{k+1} - x_k = \theta - 1 < 0.$$

Fazit: $k\theta$ liegt im Intervall $I := (\lfloor k\theta \rfloor, \lceil k\theta \rceil)$. Ist der Abstand zum rechten Rand von I kleiner als θ, dann ist $x_k > x_{k+1}$. Sonst gilt $x_k < x_{k+1}$. Die Wahrscheinlichkeit für $x_k > x_{k+1}$ ist also θ, die für $x_k < x_{k+1}$ gleich $1 - \theta$, denn die Intervallbreite von I ist 1.

Bei Zufallsfolgen sind $x_k > x_{k+1}$ und $x_k < x_{k+1}$ gleichwahrscheinlich, dagegen hat $x_k = x_{k+1}$ die Wahrscheinlichkeit 0. Also gilt hier

$$P(x_k < x_{k+1}) = P(x_k > x_{k+1}) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 49
a) In Anlehnung an die Darstellung der Vorlesung haben wir

$$\begin{array}{ll} \mu(f-g) = \int_0^1 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx & \text{(Erwartungswert)} \\ M_N(f-g) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Big(f(x_i) - g(x_i)\Big) & \text{(Schätzung)} \end{array}$$

und daher

$$\sigma(M_N(f-g)) = \frac{\sigma(f-g)}{\sqrt{N}} = \frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{N}}.$$

Die *Standardabweichung* $\widetilde{\sigma}$ hat die Darstellung

$$\widetilde{\sigma} = \sqrt{\int_0^1 \Big((f(x) - g(x)\Big)^2 dx - \left(\int_0^1 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx\right)^2}.$$

Daher gilt mit $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in [0,1]$

$$\widetilde{\sigma} \leq \sqrt{\int_0^1 \Big((f(x) - g(x)\Big)^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 \varepsilon^2 dx} = \varepsilon.$$

b) Die Funktion $\Delta(x) := e^x - (1+x)$ wächst monoton (Ableitung $e^x - 1$ ist positiv in $(0,1]$). Daher gilt

$$\Delta(0) = 0 \leq e^x - (1+x) \leq \Delta(1) = e - 2 =: \varepsilon \approx 0,718281828.$$

Für die Standardabweichungen gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(f) = \quad & \sqrt{\textstyle\int_0^1 e^{2x} dx - (\int_0^1 e^x dx)^2} \\
& = \sqrt{\tfrac{e^2-1}{2} - (e-1)^2} \approx 0,4919711476, \\
\sigma(f-g) = \quad & \sqrt{\textstyle\int_0^1 (e^x - x - 1)^2 dx - (\int_0^1 (e^x - x - 1) dx)^2} \\
& = \sqrt{\tfrac{1}{2} e^2 - 2e + \tfrac{11}{6} - (e - \tfrac{5}{2})^2} \approx 0,2089276655.
\end{aligned}$$