technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, den 8. 7. 2008

Numerische Integration

14. Übung

Aufgabe 47 (2 + 4 Punkte)

Sei

$$I(f) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy.$$

a) Bestimmen Sie $q \in \mathcal{P}_2$ mit

$$I(fq) = f(0,0) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{P}_2.$$

b) Sei $f \in \mathcal{O}_3(I)$ mit $f(0,0) = 0$. Beweisen Sie: Wenn f mit q genau sechs verschiedene gemeinsame Nullstellen hat, $(\xi_i, \eta_i),\ i = 1,\dots,6$, dann gibt es eine Kubaturformel des Grads 5 für I mit den Knoten $(0,0)$ und $(\xi_i,\eta_i),\ i = 1,\dots,6$, sofern $(\xi_i,\eta_i) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 48 (6 Punkte)

Sei θ eine irrationale Zahl aus $(0,1)$ und

$$x_k := \{k\theta\}, \quad k = 1,2,3,\dots$$

die gleichverteilte Folge aus der Vorlesung mit $n = 1$. Zeigen Sie für

$$P(x_k > x_{k+1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{x_k > x_{k+1} \\ 1\le k\le N}} 1,$$

dass $P(x_k > x_{k+1}) = \theta$ gilt, während für Zufallsfolgen $\{y_k\}$

$$P(y_k > y_{k+1}) = \frac{1}{2} \neq \theta$$

gilt.

Aufgabe 49 (4 + 4 Punkte)

Gesucht ist der Wert $I := \int_0^1 f(x)dx$. Bekannt sei ein $g \in C[0,1]$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(x) - g(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } \ x \in [0,1]$$

und das Integral

$$J := \int_0^1 g(x)dx.$$

Dann ist

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(f(x_i) - g(x_i)\Big) + J$$

ein Schätzwert für I.

a) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{I} := \int_0^1 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx$$

mit dem Monte-Carlo-Verfahren berechnet, auf eine Varianz $\tilde{\sigma} = \sigma(f-g)$ führt mit $\tilde{\sigma} \leq \varepsilon$.

b) Berechnen Sie für

$$f(x) = e^x,\ \ g(x) = 1 + x$$

das bestmögliche ε und die Größen $\sigma(f)$ und $\sigma(f-g)$.

Abgabe: Dienstag, 15.07., 16.00 Uhr im Briefkasten 48