

Numerische Mathematik II

9. Blatt

Abgabetermin: 05.01.05, nach der Vorlesung

Aufgabe 31 Zur Bestimmung des Basiswechsels der Nordsieck-Formeln bei den Adams-Moulton Verfahren tritt folgendes Interpolationsproblem auf: zur Funktion y ist das Polynom p_I vom Grad m so zu bestimmen, dass der Funktionswert und die Ableitung von y an der Stelle 0 sowie alle Ableitungswerte von y an den Stellen $-1, -2, \dots, -m + 1$ angenommen werden.

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Interpolationsproblem eindeutig lösbar ist und bestimmen Sie die Grundpolynome $L_0, L_0^*, L_{-1}^*, \dots, L_{-m+1}^*$, für die

$$p_I(x) = y(0)L_0(x) + \sum_{k=-m+1}^0 y'(k)L_k^*(x)$$

gilt.

- (b) Beweisen Sie die Fehlerformel

$$y(x) - p_I(x) = \int_0^x y'[0, -1, \dots, -m + 1, t] w_m(t) dt,$$

wobei w_m das Knotenpolynom $w_m(x) = \prod_{k=-m+1}^0 (x - k)$ und $y'[\dots]$ die dividierte Differenz der Funktion y' ist.

- (c) Zeigen Sie für $m = 3$, dass die Matrix T in Beispiel 10.29 den Basiswechsel im Polynomraum

$$(1) \quad [1, x, x^2, \dots, x^m]T = [L_{m-1}^*, \dots, L_1^*, L_0^*, L_0].$$

beschreibt.

- (d) Folgern Sie, dass mit dieser Matrix die Konsistenzbedingungen (10.30) erfüllt sind. (Beachte: $f(x, y(x)) = y'(x)$.)

Aufgabe 32 Wir betrachten als Ergänzung zu Aufgabe 20 die impliziten Runge-Kutta Verfahren mit R Stufen zur Lösung der Modellgleichung $y' = \lambda y$, $y(x_0) = y_0$, mit fester Schrittweite h . Zeigen Sie, dass

$$y_{k+1} = Q(h\lambda)y_k$$

gilt mit einer rationalen Funktion Q , deren Zähler- und Nennerpolynom jeweils den Grad kleiner oder gleich R besitzen. Berechnen Sie Q für das implizite Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 3 in Beispiel 9.37(b).

Aufgabe 33 Skizzieren Sie die Stabilitätsgebiete des Adams-Bashforth und Adams-Moulton Verfahren mit $m = 3$ Schritten sowie der zugehörigen $P(EC)E$ Methode.

Wir wünschen Ihnen allen schöne Weihnachtstage und ein frohes Fest!