

Numerische Mathematik II

12. Blatt

Abgabetermin: 26.01.05, nach der Vorlesung

Aufgabe 40 Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$-\epsilon y'' + y' = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0,$$

für $\epsilon \in \{1, 0.1, 0.01\}$ mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 0.1$. Stellen Sie die Lösungen graphisch dar.

Aufgabe 41 Die Randwertaufgabe $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ soll mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 1/(N + 1)$ gelöst werden.

- Stellen Sie das Gleichungssystem des Differenzenverfahrens auf und beschreiben Sie die Lösung $y^h = (y_0, \dots, y_{N+1})$ durch eine homogene Differenzengleichung.
- Geben Sie y^h in geschlossener Form an.
- Bestimmen Sie die exakte Lösung der Randwertaufgabe und berechnen Sie den maximalen Fehler der Näherungslösung y^h .

Aufgabe 42 Die Randwertaufgabe

$$-[py']'(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

kann durch Verwendung der linearen Interpolierenden

$$\ell(x) = \frac{(b-x)\alpha + (x-a)\beta}{b-a}$$

in eine äquivalente Randwertaufgabe für $v := y - \ell$ mit den homogenen Randbedingungen $v(a) = v(b) = 0$ überführt werden.

- Stellen Sie diese Randwertaufgabe für die Funktion v auf.
- Wie lautet die transformierte Randwertaufgabe zu

$$-\epsilon y'' + y' = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$