

Numerische Mathematik II

1. Blatt

Abgabetermin: 27.10.04, nach der Vorlesung

Aufgabe 1 Zu einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^T A x}{x^T x},$$

die den Rayleigh-Quotienten beschreibt.

- Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Zeigen Sie, dass $x \neq 0$ genau dann Eigenvektor von A ist, wenn $\nabla f(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 Die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien symmetrisch, B sei positiv definit und $A \neq 0$ sei positiv semi-definit. Das folgende Optimierungsproblem sei gestellt:

$$(1) \quad \max_{x \in U} (x^T A x) \quad \text{für} \quad U := \{x \in \mathbb{R}^n : x^T B x \leq 1\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Es existiert eine Lösung $x^* \in U$ mit $m := f(x^*) = \max_{x \in U} f(x)$, und es gilt $m > 0$.
- Die Eigenwerte der Matrix $B^{-1}A$ sind alle reell. Sie liegen im Intervall $[0, m]$.
- Für jede Lösung x^* gilt:
 - $(x^*)^T B x^* = 1$, d.h. x^* liegt auf dem Rand von U .
 - x^* ist Eigenvektor von $B^{-1}A$ zum Eigenwert m .

Aufgabe 3 Die $n \times n$ -Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \inf \{ \|S^{-1} A S\|_F^2 : S \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ invertierbar} \}.$$

Aufgabe 4 Die Kondition des Eigenwertproblems bei mehrfachen Eigenwerten unsymmetrischer Matrizen soll durch ein Beispiel veranschaulicht werden. Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und A_ϵ die Matrix mit gestörtem Eintrag $a_{21} = \epsilon$.

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A und A_ϵ .
- Berechnen Sie einen Eigenvektor v und einen "Links-Eigenvektor" w von A mit $\|v\| = \|w\| = 1$ zum Eigenwert 1.
- Wie lässt sich die geometrische Deutung von Satz 8.8, Gleichung (8.5) hier übertragen?