

Kapitel 12

Randwertaufgaben

12.1 Grundlagen

Die in den Kapiteln 9-11 behandelten Anfangswertaufgaben können als Spezialfälle der allgemeinen *Randwertaufgabe* (abgekürzt RWA) angesehen werden.

Definition 12.1 (Randwertaufgabe) Eine Randwertaufgabe (RWA) ist gegeben durch ein System von Gleichungen

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in I = [a, b], \\ r(y(a), y(b)) = 0; \end{cases} \quad (12.1)$$

hierbei sind $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Eine Lösung der RWA ist eine differenzierbare Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die die gegebenen Gleichungssysteme (12.1) erfüllt.

I.a. setzen wir voraus, dass f und r mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Im Gegensatz zu den AWAn ist eine allgemeine Theorie der Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen von RWAn nur unter stark einschränkenden Bedingungen möglich. Eine wichtige Klasse stellen die linearen RWAn dar.

Definition 12.2 (Lineare Randwertaufgabe) Die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} y'(x) - A(x)y(x) = f(x), & x \in I = [a, b], \\ B_a y(a) + B_b y(b) = g, \end{cases} \quad (12.2)$$

mit Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einer stetigen Matrixfunktion $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $g \in \mathbb{R}^n$, heißt inhomogene lineare RWA.

Auch eine lineare RWA ist ohne Zusatzbedingung nicht unbedingt lösbar, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 12.3 Die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad x \in [0, \pi] \quad \iff \quad \begin{cases} y_1'(x) - y_2(x) = 0 \\ y_2'(x) + y_1(x) = 0 \end{cases}$$

hat die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Für verschiedene Randbedingungen ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Lösungsverhalten:

- (i) $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$ ergibt die eindeutige Lösung $y \equiv 0$.

- (ii) $y(0) = y(\pi) = 0$ ergibt unendlich viele Lösungen $y(x) = c_1 \sin x$.
- (iii) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$ ergibt keine Lösung.

Wir entwickeln zunächst eine Darstellung für die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) - A(x)y(x) = f(x), \quad x \in I = [a, b] \quad (12.3)$$

(ohne Randbedingung!). Wir erhalten eine spezielle Lösung $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der inhomogenen Differentialgleichung (12.3) sowie ein *Fundamentalsystem* (d.h. eine Basis von n linear unabhängigen Lösungen) $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'(x) - A(x)y(x) = 0$ als die eindeutig bestimmten Lösungen der $n + 1$ **Anfangswertaufgaben**

$$\begin{aligned} y_0'(x) - A(x)y_0(x) &= f(x), & x \geq a, & \quad y_0(a) = 0, \\ y_i'(x) - A(x)y_i(x) &= 0, & x \geq a, & \quad y_i(a) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Hierbei sind e_i , $1 \leq i \leq n$, die kanonischen Einheitsvektoren. Mit der hieraus gebildeten *Fundamentalmatrix*

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{n1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

lässt sich also jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (12.3) darstellen als

$$y(x) = y(x; s) := y_0(x) + Y(x)s \quad (12.6)$$

mit einem Vektor $s \in \mathbb{R}^n$. Wegen $y_0(a) = 0$ und $Y(a) = I$ ist die Funktion in (12.6) genau dann Lösung der RWA (12.2), wenn der Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem

$$[B_a + B_b Y(b)]s = g - B_b y_0(b) \quad (12.7)$$

löst. Damit ist die folgende Aussage zur Eindeutigkeit bewiesen.

Satz 12.4 (Existenz und Eindeutigkeit bei linearen RWAn) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (a) *Die lineare RWA (12.2) besitzt eine eindeutige Lösung.*
- (b) *Die zugehörige homogene RWA (mit $f(x) = 0$ und $g = 0$) besitzt nur die triviale Lösung.*
- (c) *Die Matrix $B_a + B_b Y(b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist regulär.*

Mit Hilfe dieser Untersuchung lässt sich auch für nichtlineare RWAn eine Aussage zur "lokalen Eindeutigkeit" treffen; damit ist gemeint, dass keine zweite Lösung $\tilde{y} \neq y$ existiert, deren Graph dem von y beliebig nahekommt. Genauer: Eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der RWA heißt *lokal eindeutig*, wenn es ein $\rho > 0$ gibt, so dass für alle weiteren Lösungen $z \neq y$ der RWA

$$\min_{x \in I} |z(x) - y(x)| \geq \rho$$

gilt.

Wir bezeichnen mit f_y , r_u und r_v die Jacobi-Matrizen der Vektorfunktionen $f(x, y)$ und $r(u, v)$.

Satz 12.5 (Lokale Eindeutigkeit) *Eine Lösung $y(x)$ der RWA (12.1) ist genau dann lokal eindeutig, wenn die lineare homogene RWA*

$$\begin{cases} w'(x) - f_y(x, y(x))w(x) = 0, & x \in I, \\ r_u(y(a), y(b))w(a) + r_v(y(a), y(b))w(b) = 0 \end{cases} \quad (12.8)$$

nur die triviale Lösung $w \equiv 0$ besitzt.

Beweis: Wir zeigen nur die Richtung \Leftarrow und verweisen für die Umkehrung auf die Literatur. y sei die gegebene Lösung der RWA (12.1). Für jede weitere Lösung z erfüllt $w(x) = y(x) - z(x)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} w'(x) &= f(x, y(x)) - f(x, z(x)) = \int_0^1 f_y(x, y(x) + (1-s)\{z(x) - y(x)\}) w(x) ds \\ &= f_y(x, y(x))w(x) + \underbrace{\left(\int_0^1 [f_y(x, y(x) + (1-s)\{z(x) - y(x)\}) - f_y(x, y(x))] ds \right)}_{=:\alpha(x)} w(x) \end{aligned}$$

und die Randbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= r(y(a), y(b)) - r(z(a), z(b)) \\ &= r(y(a), y(b)) - r(z(a), y(b)) + r(z(a), y(b)) - r(z(a), z(b)) \\ &= \int_0^1 r_u(y(a) + (1-s)\{z(a) - y(a)\}, y(b)) w(a) ds \\ &\quad + \int_0^1 r_v(z(a), y(b) + (1-s)\{z(b) - y(b)\}) w(b) ds \\ &= r_u(y(a), y(b))w(a) + r_v(y(a), y(b))w(b) \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_0^1 [r_u(y(a) + (1-s)\{z(a) - y(a)\}, y(b)) - r_u(y(a), y(b))] ds \right)}_{=:\beta_a(x)} w(a) \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_0^1 [r_v(z(a), y(b) + (1-s)\{z(b) - y(b)\}) - r_v(y(a), y(b))] ds \right)}_{=:\beta_b(x)} w(b). \end{aligned}$$

Mit den Matrixfunktionen $\alpha(x)$, $\beta_a(x)$ und $\beta_b(x)$, die von y und z abhängen, ist $w = y - z$ also Lösung der homogenen linearen RWA

$$\begin{cases} w'(x) - [f_y(x, y(x)) + \alpha(x)] w(x) = 0, & x \in I, \\ [r_u(y(a), y(b)) + \beta_a] w(a) + [r_v(y(a), y(b)) + \beta_b] w(b) = 0. \end{cases} \quad (12.9)$$

Diese RWA ist eine Störung der linearen homogenen RWA (12.8).

Wir setzen nun voraus, dass die lineare homogene RWA (12.8) nur die triviale Lösung besitzt. Dann ist nach Satz 12.4 die Matrix

$$C := r_u(y(a), y(b)) + r_v(y(a), y(b))Y(b) \quad (12.10)$$

regulär; hier bezeichnet Y die Fundamentalmatrix der Lösungen der linearen Differentialgleichung in (12.8) (beachte, dass die Matrixfunktion $A(x) := f_y(x, y(x))$ zur gegebenen Funktion y nicht von w abhängt). Mit \tilde{C}_z bezeichnen wir die entsprechende Matrix zur RWA (12.9).

Zu jeder Lösung z der RWA (12.1) setzen wir

$$\delta_z := \min_{x \in I} |y(x) - z(x)|.$$

Weiterhin bezeichnen wir die Fundamentalmatrix zur linearen homogenen Differentialgleichung

$$w'(x) - [f_y(x, y(x)) + \alpha(x)] w(x) = 0, \quad x \in I,$$

mit \tilde{Y}_z .

Lösungen y, z der RWA (12.1) sind insbesondere Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Wir wählen irgendein $R > 0$ (etwa $R = 1$) und erhalten eine gleichmäßige Lipschitzkonstante L von f in der Umgebung U_R des Graphen von y . Weiter setzen wir $\rho_1 > 0$ mit $e^{L(b-a)}\rho_1 < R$. Dann ergibt die Stabilitätsaussage zu Anfangswertaufgaben in Bemerkung 9.6(b) den folgenden Schluss: Für jede Lösung z der RWA (12.1) mit $\delta_z < \rho_1$, also

$$|y(x_0) - z(x_0)| < \rho_1 \quad \text{für ein } x_0 \in I,$$

folgt

$$\max_{x \in I} |y(x) - z(x)| < e^{L(b-a)}\rho_1 < R.$$

Insbesondere liegt dann die Lösung $z(x)$ in U_R . Weil f_y, r_u und r_v Lipschitz-stetig sind, gibt es eine Konstante $c_1 > 0$ mit

$$\delta_z < \rho_1 \implies \sup_{x \in I} \|\alpha(x)\| \leq c_1 \delta_z, \quad \sup_{x \in I} \|\beta_a(x)\| \leq c_1 \delta_z, \quad \sup_{x \in I} \|\beta_b(x)\| \leq c_1 \delta_z.$$

Weiterhin liefert die Stabilitätsaussage in Bemerkung 9.6(b)

$$\delta_z < \rho_1 \implies \sup_{x \in I} \|Y(x) - \tilde{Y}_z(x)\| \leq c_2 \delta_z.$$

Daraus können wir schließen, dass eine Konstante c_3 existiert mit

$$\delta_z < \rho_1 \implies \|C - \tilde{C}_z\| \leq c_3 \delta_z.$$

Die Matrix C in (12.10) ist regulär, also gilt

$$\rho := \min\{\rho_1, 1/(c_3\|C^{-1}\|)\} > 0.$$

Aus dem Störungslemma für reguläre Matrizen folgt nun

$$\delta_z < \rho \implies \|C - \tilde{C}_z\| \leq c_3 \delta_z < 1/\|C^{-1}\| \implies \tilde{C}_z \text{ regulär.}$$

Mit Satz 12.4 gilt also in Hinblick auf die homogene lineare RWA (12.9)

$$\delta_z < \rho \implies w(x) = y(x) - z(x) \equiv 0.$$

Damit ist die lokale Eindeutigkeit der Lösung y gezeigt. \square

Eine besonders wichtige Klasse linearer RWAn entsteht durch die Umformung der folgenden Randwertprobleme 2. Ordnung.

Definition 12.6 (Sturm-Liouville-Problem) *Es seien $p \in C^1(I)$, $q, r, f \in C(I)$ sowie $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, g_a, g_b \in \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$\begin{cases} -[py']'(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), & x \in I = [a, b], \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha_0 y(a) = g_a, & \beta_1 y'(b) + \beta_0 y(b) = g_b, \end{cases} \quad (12.11)$$

(reguläres) Sturm-Liouville-Problem.

Bemerkung: Der Begriff "regulär" wird hier verwendet zur Festlegung, dass p, q, r keine Singularitäten besitzen und das Intervall I beschränkt ist.

Die Umformung in eine lineare RWA erfolgt durch die übliche Festlegung $y_1 := y, y_2 = y'$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -[py_2]' + qy_2 + ry_1 &= f, \quad x \in I, \\ \alpha_1 y_2(a) + \alpha_0 y_1(a) &= g_a, \quad \beta_1 y_2(b) + \beta_0 y_1(b) = g_b. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $p(t) \geq \rho > 0$ ist dies äquivalent zur RWA in der Standardform (12.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r/p & (q-p')/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -f/p \end{bmatrix}, \quad x \in I, \\ \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Der Spezialfall von sog. "Dirichlet-Randbedingungen"

$$y(a) = g_a, \quad y(b) = g_b \quad (12.12)$$

lässt sich wie folgt behandeln.

Satz 12.7 *Es gelte $p(t) \geq \rho > 0$ und*

$$\rho + \frac{(b-a)^2}{4} \min_{x \in I} \left[r(x) - \frac{q'(x)}{2} \right] > 0. \quad (12.13)$$

Dann besitzt das Sturm-Liouville-Problem (12.11) mit Dirichletschen Randbedingungen (12.12) eine eindeutige Lösung $y \in C^2(I)$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage (b) von Satz 12.4. Sei also y die Lösung von

$$-[py']' + qy' + ry = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Multiplikation mit y und Integration ergibt

$$-\int_a^b [py']' y \, dx + \frac{1}{2} \int_a^b q(y^2)' \, dx + \int_a^b ry^2 \, dx = 0.$$

Mit partieller Integration im ersten und zweiten Integral folgt unter Verwendung der Randbedingungen

$$\int_a^b p(y')^2 \, dx + \int_a^b \left(r - \frac{q'}{2} \right) y^2 \, dx = 0.$$

Also folgt

$$\rho \int_a^b (y')^2 \, dx + \min_{x \in I} \left(r - \frac{q'}{2} \right) \int_a^b y^2 \, dx \leq 0.$$

Aus der Identität

$$y(x) = \underbrace{y(a)}_{=0} + \int_a^x y'(t) \, dt$$

folgt weiterhin die Ungleichung

$$\int_a^b y^2 \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} \int_a^b (y')^2 \, dx.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{4}{(b-a)^2} \rho \int_a^b y^2 \, dx + \min_{x \in I} \left(r - \frac{q'}{2} \right) \int_a^b y^2 \, dx \leq 0.$$

Die Voraussetzung des Satzes impliziert dann

$$\int_a^b y^2 \, dx \leq 0,$$

und dies ergibt offensichtlich $y \equiv 0$. \square

12.2 Schießverfahren

Die Grundidee der Schießverfahren ist, die gegebene Differentialgleichung auf dem Intervall $I = [a, b]$ auf Anfangswertaufgaben zurückzuführen und die Anfangswertparameter so einzustellen, dass die Randbedingungen erfüllt werden.

12.2.1 Lineare Randwertaufgaben

Für die lineare RWA

$$\begin{cases} y'(x) - A(x)y(x) = f(x), & x \in I = [a, b], \\ B_a y(a) + B_b y(b) = g, \end{cases}$$

wurde im Abschnitt 12.1 bereits ein analytisches Verfahren dieser Form beschrieben. Es basiert auf der Berechnung der speziellen Lösung $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und der Fundamentalmatrix $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ als Lösungen der AWAn

$$\begin{aligned} y_0'(x) - A(x)y_0(x) &= f(x), & x \geq a, & y_0(a) = 0, \\ Y'(x) - A(x)Y(x) &= 0, & x \geq a, & Y(a) = I. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Die Lösung der RWA ist dann gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + Y(x)s$$

mit der Lösung $s \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{B_a + B_b Y(b)}_{=Q} s = g - B_b y_0(b),$$

vorausgesetzt die Matrix Q ist regulär. Mit anderen Worten, die Funktion $y = y(\cdot; s)$ löst die AWA

$$y'(x; s) - A(x)y(x; s) = f(x), \quad y(a; s) = s,$$

für die gerade die Randbedingung

$$B_a y(a; s) + B_b y(b; s) = 0$$

erfüllt ist.

Algorithmus 12.8 (Einfaches Schießverfahren) 1. Zur Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$ werden mit einem Einschrittverfahren, Prädiktor-Korrektor-Verfahren, o.ä. die $n + 1$ Näherungen $(y_{i,k}^h)_{0 \leq k \leq N}$, $0 \leq i \leq n$, zu den Lösungen y_i der AWAn (12.14) bestimmt (Stützstellen $x_k = a + kh$).

2. Mit der Matrix

$$Q^h := B_a + B_b Y_N^h \quad (12.15)$$

wird, falls sie regulär ist, das Gleichungssystem

$$Q^h s^h = g - B_b y_{0,N}^h \quad (12.16)$$

gelöst.

3. Die eindeutige Lösung s^h des Gleichungssystems (12.16) ergibt die Lösung

$$y_k^h := y_{0,k}^h + Y_k^h s^h, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Natürlich kann ebenfalls mit variabler Schrittweite operiert werden. Dann bietet es sich an, anstelle von Schritt 3. die Näherungslösung als Lösung der AWA

$$y'(x; s^h) - A(x)y(x; s^h) = f(x), \quad y(a; s^h) = s^h,$$

erneut mit variabler Schrittweite zu berechnen. Bei diesem Vorgehen kann auf das Speichern aller Zwischenwerte $y_{i,k}^h$, $k < N$, verzichtet werden.

Zur Frage der Invertierbarkeit der Matrix Q^h in (12.15) und der Konvergenz für $h \rightarrow 0$ dient der folgende Satz.

Satz 12.9 (Konvergenz des einfachen Schießverfahrens) *Die Funktionen $A(x)$ und $f(x)$ seien stetig differenzierbar und die Matrix $Q = B_a + B_b Y(b)$ sei regulär. Zur Berechnung der $y_{i,k}^h$, $0 \leq i \leq n$, werde jeweils ein Verfahren der Ordnung m eingesetzt. Dann ist für hinreichend kleines h die Matrix Q^h ebenfalls regulär und das Verfahren konvergiert mit der Ordnung m :*

$$\max_{0 \leq k \leq N} |y_k^h - y(x_k)| = \mathcal{O}(h^m), \quad h \rightarrow 0.$$

Beweis: Die Lipschitzkonstante der (homogenen und inhomogenen) Differentialgleichungen in (12.14) ist

$$L := \max_{x \in I} \|A(x)\|.$$

Für die Näherungslösungen an der Stelle $x = b$ gilt also

$$\|y_{i,N}^h - y_i(b)\| \leq K e^{L(b-a)} h^m,$$

wobei die Konstante K im wesentlichen nur von den gegebenen Daten $A(t)$ und $f(t)$ abhängt. Hieraus ergibt sich sofort

$$\|Q - Q^h\| = \|B_b(Y(b) - Y_N^h)\| \leq \|B_b\| \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i(b) - y_{i,N}^h\| = \mathcal{O}(h^m).$$

Für hinreichend kleines h ist also Q_h regulär und

$$\|Q - Q^h\| < 1/\|Q^{-1}\| \implies \|Q^{-1}(Q^h - Q)\| < 1,$$

und dies impliziert die Regularität von $Q^h = Q(I + Q^{-1}(Q^h - Q))$ sowie die Abschätzung

$$\|(Q^h)^{-1}\| \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{1 - \|Q^{-1}\| \|Q^h - Q\|}.$$

Wegen

$$Q^{-1} - (Q^h)^{-1} = Q^{-1}(Q^h - Q)(Q^h)^{-1}, \quad (Q^h)^{-1} = (I + Q^{-1}(Q^h - Q))^{-1}Q^{-1}$$

folgt weiter

$$\|Q^{-1} - (Q^h)^{-1}\| \leq \frac{\|Q^{-1}\|^2}{1 - \|Q^{-1}\| \|Q^h - Q\|} \|Q^h - Q\| = \mathcal{O}(h^m).$$

Daraus können wir nun folgern, dass

$$\begin{aligned} \|s - s^h\| &= \|Q^{-1}[g - B_b y_0(b)] - (Q^h)^{-1}[g - B_b y_{0,N}^h]\| \\ &\leq \|Q^{-1} - (Q^h)^{-1}\| \|g\| + \|Q^{-1} - (Q^h)^{-1}\| \|B_b\| \|y_0(b)\| + \|(Q^h)^{-1}\| \|B_b\| \|y_0(b) - y_{0,N}^h\| = \mathcal{O}(h^m). \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich die Behauptung, nämlich

$$\begin{aligned} \|y_k^h - y(x_k)\| &= \|y_{0,N}^h + Y_N^h s^h - y_0(b) - Y(b)s\| \\ &\leq \|y_{0,N}^h - y_0(b)\| + \|Y_N^h - Y(b)\| \|s^h\| + \|Y(b)\| \|s - s^h\| = \mathcal{O}(h^m). \end{aligned}$$

□

In der praktischen Anwendung treten häufig Schwierigkeiten auf, die von der Stabilität der numerischen Integration über längere Zeitintervalle herrühren (s. wieder Bemerkung 9.6(b), der Stabilitätskegel öffnet sich mit der Rate $e^{L(x-a)}$). Der Wert der Lösung $y = y(\cdot; s)$ am rechten Intervallende $x = b$ kann sehr empfindlich gegenüber Störungen am linken Intervallende sein, also den Störungen des Parametervektors s . Zur Kompensation müsste s mit stark erhöhter Genauigkeit berechnet werden, was in der Regel nicht sinnvoll realisierbar ist.

Beispiel 12.10 Wir betrachten das lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0, & x \in I = [0, 6], \\ y(0) = 1, & y(6) = 1. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Vorgabe des ‘‘Randwerts’’ $y(0) = 1$ führt zur Vereinfachung der Schießmethode, da nur ein skalarer Parameter s (anstatt eines Vektors im \mathbb{R}^2) als zusätzlicher Anfangsparameter benötigt wird. Die Lösungsschar zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = s,$$

lautet

$$y(x; s) = \frac{1}{6}(2 + s)e^{4x} + \frac{1}{6}(4 - s)e^{-2x}. \quad (12.17)$$

Die zweite Randbedingung

$$y(6; s) = \frac{1}{6}(2 + s)e^{24} + \frac{1}{6}(4 - s)e^{-12} = 1$$

liefert den Wert

$$s = \frac{6 - 2e^{24} - 4e^{-12}}{e^{24} - e^{-12}} \approx -1.999\,999\,999\,77.$$

Die Lösung der RWA ist somit gegeben durch

$$y(x) = 3.775\,111\,349\,06 \cdot 10^{-11} \cdot e^{4x} + 0.999\,999\,999\,962 \cdot e^{-2x}.$$

Weil die Lösungsschar in (12.17) linear von s abhängt, ergibt sich bei einer Änderung von s um Δs die Beziehung

$$\Delta y(x) := y(x; s + \Delta s) - y(x; s) = \frac{1}{6} \Delta s (e^{4x} - e^{-2x}).$$

Wir erhalten also einen exponentiell wachsenden Verstärkungsfaktor der Form $e^{L(x-a)}$ wie in Bemerkung 9.6(b). Am rechten Intervallende ist dies

$$\Delta y(6) = \frac{1}{6} \Delta s (e^{24} - e^{-12}) \approx \Delta s \cdot 4.415 \cdot 10^9.$$

Also werden die Änderungen Δs des Anfangswerts bei $x = 0$ eine um den Faktor $4.415 \cdot 10^9$ verstärkte Änderung des Funktionswerts bei $x = 6$ nach sich ziehen. Arbeitet man etwa mit einem 12stelligen Dezimalrechner und variiert s nahe -2 um die kleinstmöglichen absoluten Änderungen $\Delta s = \pm 10^{-11}$, so beträgt die Änderung $\Delta y(6) = \pm 0.0442$. Die geforderte Randbedingung $y(6) = 1$ kann also im schlechtesten Fall nur mit einer Abweichung von 0.0221 erfüllt werden.

Zur Abhilfe dieses Problems führt man die **Mehrfachschießmethode** ein. Das Intervall $[a, b]$ wird unterteilt in Teilintervalle

$$a = x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_{R+1} = b,$$

mit dem Ziel, die Werte

$$e^{L_j(t_{j+1}-t_j)} \tag{12.18}$$

moderat zu halten. (Hierbei ist L_j eine Lipschitzkonstante der Differentialgleichung auf dem Intervall $t_j \leq x \leq t_{j+1}$.) Sodann wird das einfache Schießverfahren auf jedes Teilintervall angewandt. Schließlich werden die so erhaltenen Teilstücke zu einer globalen Lösung zusammengesetzt.

Das Verfahren wird zunächst analytisch beschrieben. Für gegebene Vektoren $s_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq R$, seien

$$y(x; x_j, s_j), \quad 1 \leq j \leq R,$$

die Lösungen der AWAn

$$y' - A(x)y = f(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad y(x_j) = s_j.$$

Das Problem besteht darin, die R Vektoren s_j so zu bestimmen, dass die zusammengesetzte Funktion

$$y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) := y(x; x_j, s_j) \quad \text{für } x \in [x_j, x_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq R,$$

stetig auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ ist und die Randbedingung $B_a y(a) + B_b y(b) = g$ erfüllt. Denn dann ist y automatisch differenzierbar (also Lösung der RWA): für $x \in [x_j, x_{j+1}]$ folgt nämlich schon aus der Stetigkeit von y

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x) - y(x_j) + \sum_{\ell=1}^{j-1} (y(x_{\ell+1}) - y(x_\ell)) + y(a) \\ &= \int_{x_j}^x y'(t) dt + \sum_{\ell=1}^{j-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} y'(t) dt + y(a) \\ &= \int_a^x [A(t)y(t) + f(t)] dt + y(a). \end{aligned}$$

Die Übergangs- und Randbedingungen lauten also

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}; x_j, s_j) &= s_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, R-1, \\ B_a s_0 + B_b y(b; x_R, s_R) &= g. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Wie beim einfachen Schießverfahren werden dazu auf jedem Teilintervall ($1 \leq j \leq R$) die partikuläre Lösung y_j und die Fundamentalmatrix Y_j bestimmt aus den AWAn

$$\begin{aligned} y_j' - A(x)y_j &= f(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad y_j(x_j) = 0, \\ Y_j' - A(x)Y_j &= 0, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad Y_j(x_j) = I. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Die lokale Lösung hat dann die Form

$$y(x; x_j, s_j) = y_j(x) + Y_j(x)s_j, \quad j = 1, \dots, R.$$

Die Übergangs- und Randbedingungen (12.19) erhalten so die Form eines linearen Gleichungssystems für die Parametervektoren s_1, \dots, s_R :

$$\begin{aligned} B_a s_1 &+ B_b Y_R(b) s_R &= g - B_b y_R(b) \\ -Y_1(t_2) s_1 &+ s_2 &= y_1(x_2) \\ &+ -Y_2(t_3) s_2 + s_3 &= y_2(x_3) \\ &&= \vdots \\ -Y_{R-1}(x_R) s_{R-1} &+ s_R &= y_{R-1}(x_R). \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem der Größe $Rn \times Rn$. Die Matrix A_R dieses Gleichungssystems besitzt die Faktorisierung

$$A_R = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_R \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}}_{=: \mathcal{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I & & & \\ -Y_1(t_2) & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -Y_{R-1}(x_R) & I \end{bmatrix}}_{=: \mathcal{L}},$$

wobei die Matrizen Q_1, \dots, Q_{R-1} die Rekursion

$$\begin{aligned} Q_R &= B_b Y_R(b), \\ Q_j &= Q_{j+1} Y_j(x_{j+1}), \quad j = R-1, R-2, \dots, 2, \\ Q_1 &= B_a + Q_2 Y_1(x_2) \end{aligned}$$

erfüllen. Insbesondere ist also

$$Q_1 = B_a + B_b Y_R(b) \cdots Y_2(x_3) Y_1(x_2). \quad (12.21)$$

Offensichtlich ist die Matrix A_R genau dann regulär, wenn die Matrix Q_1 regulär ist. Wir zeigen, dass dies genau mit der Regularität der Matrix $B_a + B_b Y(b)$ zum einfachen Schießverfahren übereinstimmt. Insgesamt ist also die Mehrfachschießmethode immer durchführbar, wenn es die einfache Schießmethode ist.

Lemma 12.11 *Mit der Matrix $Q = B_a + B_b Y(b)$ zum einfachen Schießverfahren gilt $Q_1 = Q$.*

Beweis: Die Fundamentalmatrizen Y und Y_j erfüllen die Differentialgleichung

$$Y' - A(x)Y = 0, \quad Y_j' - A(x)Y_j = 0, \quad j = 1, \dots, R,$$

und die Anfangsbedingungen

$$Y(a) = Y_1(a) = I, \quad Y_j(x_j) = I, \quad j = 2, \dots, R.$$

Wählt man im j -ten Intervall die Anfangswerte $V := Y(x_j)$ an der Stelle $x = x_j$, so erhält man natürlich wieder die Lösung Y selbst. Dies in der Form der Fundamentalmatrix Y_j ausgedrückt bedeutet

$$Y(x) = Y_j(x)Y(x_j), \quad x \in [a, b], \quad j = 2, \dots, R.$$

Damit vereinfacht sich das Produkt in (12.21) zu

$$Y_R(b) \cdots Y_2(x_3) Y_1(x_2) = Y_R(b) \cdots Y_2(x_3) Y(x_2) = Y_R(b) \cdots Y_3(x_4) Y(x_3) = \cdots = Y_R(b) Y(x_R) = Y(b).$$

Dies liefert sofort die Behauptung.

Bemerkung 12.12 Die Faktorisierung $A_R = \mathcal{R}\mathcal{L}$ sollte nicht zur Lösung des linearen Gleichungssystems verwendet werden. Die Matrix $Q = Q_1$ ist, wie im Beispiel gesehen, meist sehr schlecht konditioniert, da sie die gesamte Intervalllänge “beinhaltet”. Stattdessen kann z.B. die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche an der ursprünglichen Matrix A_R durchgeführt werden. Hierbei bleibt sogar die Bandstruktur der Matrix erhalten, was zu sehr effizienter Rechnung führt.

Bei der numerischen Durchführung des Mehrschießverfahrens werden anstatt der “exakten” Lösungen y_j und Y_j in jedem Teilintervall die Näherungslösungen y_j^h und Y_j^h mit einem Einschritt- oder Mehrschrittverfahren bestimmt. Diese werden in die Matrix A_R^h eingesetzt. Die Aussagen zur Regularität dieser Matrix und zur Konvergenz des Verfahrens gelten analog wie beim einfachen Schießverfahren. Insbesondere erzielt man also wieder Verfahren der Ordnung m durch die Anwendung von AWA-Lösern derselben Ordnung. Es kann darüberhinaus gezeigt werden, dass die Matrix Q_1^h eine deutlich bessere Approximation von $Q_1 = Q$ ist als die Matrix Q^h vom einfachen Schießverfahren.

12.2.2 Nichtlineare Randwertaufgaben

Gestellt sei nun die nichtlineare RWA in (12.1), also

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in I = [a, b], \\ r(y(a), y(b)) = 0. \end{cases}$$

Hierbei sind $f(x, y)$ und $r(u, v)$ möglicherweise nichtlineare Funktionen von y bzw. u, v . Wir nehmen an, dass eine lokal eindeutige Lösung $y \in C^1([a, b])$ existiert.

Die einfache Schießmethode verwendet wieder einen Parametervektor $s \in \mathbb{R}^n$ für die Anfangswerte und bestimmt die Lösung $y = y(\cdot; s)$ der AWA

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = s. \quad (12.22)$$

Iterativ wird dann s so bestimmt, dass die (nichtlineare) Randbedingung

$$r(y(a; s), y(b; s)) = 0$$

erfüllt ist. Wegen $y(a) = s$ erhalten wir also eine Lösung der RWA, wenn s die nichtlineare Gleichung

$$F(s) := r(s, y(b; s)) = 0 \quad (12.23)$$

erfüllt.

Verwendet man z.B. das Newton-Verfahren, so wird die Funktionalmatrix

$$F'(s) = r_u(s, y(b; s)) + r_v(s, y(b; s)) \cdot \partial_s y(b; s) \quad (12.24)$$

der Funktion F benötigt. Die beiden Ausdrücke $r_u(s, y(b; s))$ und $r_v(s, y(b; s))$ sind durch Einsetzen der Lösung der AWA (12.22) zu bestimmen. Die Funktionalmatrix $\partial_s y(\cdot; s)$ bezeichnet die Ableitung der Lösung der AWA (12.22) nach ihren Anfangswerten. Diese erhalten wir nach dem folgenden Satz als Lösung einer zugehörigen linearen AWA.

Satz 12.13 (Differenzielle Stabilität von AWAn) *Ist $f : I \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so hängt die Lösung $y(\cdot; s)$ der AWA (12.22) stetig differenzierbar vom Anfangswert $s \in \mathbb{R}^n$ ab. Die Funktionalmatrix $W(x) := \partial_s y(x; s)$ ist die Lösung der linearen homogenen AWA*

$$W'(x) - f_y(x, y(x; s))W(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad W(a) = I. \quad (12.25)$$

Beweis: Wir betrachten die Lösungen $y(\cdot; s)$ und $y(\cdot; s + \delta e_i)$ mit dem kanonischen Einheitsvektor e_i und beliebigem (kleinen) $\delta > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{y(x; s + \delta e_i) - y(x; s)}{\delta} &= \frac{s + \delta e_i - s}{\delta} + \frac{1}{\delta} \int_a^x [f(t, y(t; s + \delta e_i)) - f(t, y(t; s))] dt \\ &= e_i + \frac{1}{\delta} \int_a^x \int_0^1 f_y(t, \tau y(t; s + \delta e_i) + (1 - \tau)y(t; s)) \{y(t; s + \delta e_i) - y(t; s)\} d\tau dt. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x; s)}{\partial s_i} &= e_i + \int_a^x \int_0^1 f_y(t, \tau y(t; s) + (1 - \tau)y(t; s)) d\tau \frac{\partial y(t; s)}{\partial s_i} dt \\ &= e_i + \int_a^x f_y(t, y(t; s)) \frac{\partial y(t; s)}{\partial s_i} dt. \end{aligned}$$

Die Funktion $w_i = \frac{\partial y(x; s)}{\partial s_i}$ ist also Lösung der Integralgleichung

$$w_i(x) = e_i + \int_a^x f_y(t, y(t; s)) w_i(t) dt,$$

die wiederum äquivalent ist zur linearen homogenen AWA

$$w_i'(x) - f_y(x, y(x; s))w_i(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad w_i(a) = e_i.$$

Zusammensetzen der Vektoren w_i zur Fundamentalmatrix W ergibt die Behauptung. \square

Wir erhalten nun die folgende Aussage, die die Grundvoraussetzung zur Durchführung des Newton-Verfahrens zur Lösung von $F(s) = 0$ darstellt.

Satz 12.14 *Die nichtlineare RWA besitze eine lokal eindeutige Lösung $y = y(x; \hat{s})$. Dann ist die Funktionalmatrix $F'(\hat{s})$ regulär.*

Beweis: Wir müssen nur die vorhergehenden Aussagen kombinieren. Die homogene Differentialgleichung in (12.25) ist dieselbe wie im Satz 12.5 zur lokalen Eindeutigkeit der Lösung y . Mit W bezeichnen wir die Fundamentalmatrix dieser Differentialgleichung. Ist y lokal eindeutig, so ist die lineare RWA (12.8) eindeutig lösbar. Mit Satz 12.4 folgt dann, dass die Matrix

$$r_u(\hat{s}, y(b; \hat{s})) + r_v(\hat{s}, y(b; \hat{s}))W(b)$$

regulär ist. Dies ist aber gerade die Funktionalmatrix $F'(\hat{s})$ in (12.24). \square

Das einfache Schießverfahren für nichtlineare Randwertaufgaben hat die folgende analytische Form. Die Frage der numerischen Lösung durch Einschrittverfahren o.ä. wird weiter unten erläutert.

Algorithmus 12.15 (Einfaches Schießverfahren für nichtlineare RWAn, analytische Form)

1. Wähle den Startvektor $s^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ für die Anfangswertparameter.
2. Für $t = 0, 1, 2, \dots$,

a) bestimme die Lösung $y = y(x; s^{(t)})$ der AWA

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = s^{(t)}$$

und berechne den Funktionswert $F(s^{(t)}) = r(s^{(t)}, y(b; s^{(t)}))$;

b) bestimme die Lösung W der homogenen linearen Matrix-AWA

$$W' - f_y(x, y(x; s^{(t)})) \cdot W = 0, \quad x \in [a, b], \quad W(a) = I,$$

und berechne den Wert der Matrixfunktion

$$F'(s^{(t)}) = r_u(s^{(t)}, y(b; s^{(t)})) + r_v(s^{(t)}, y(b; s^{(t)})) \cdot W(b).$$

c) bestimme den neuen Vektor $s^{(t+1)}$ der Anfangswertparameter aus dem linearen Gleichungssystem

$$F'(s^{(t)})(s^{(t+1)} - s^{(t)}) = -F(s^{(t)}),$$

setze $t := t + 1$ und fahre so lange fort, bis $F(s^{(t)}) = 0$ mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist.

Beispiel 12.16 Wir betrachten die Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$v''(x) = \frac{3}{2}v(x)^2, \quad x \in [0, 1], \quad v(0) = 4, \quad v(1) = 1.$$

(Eine Lösung der RWA ist $v(x) = \frac{4}{(1+x)^2}$; eine weitere Lösung existiert.) Die Standardform lautet mit $y_1 := v$, $y_2 := v'$

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \frac{3}{2}y_1(x)^2, \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad y_1(0) = 4, \quad y_1(1) = 1.$$

Die zugehörige AWA ist hier problemangepasst und benutzt nur einen Parameter s ,

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \frac{3}{2}y_1(x)^2, \quad x \in [0, 1], \quad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = s. \end{cases}$$

Die Lösung bezeichnen wir wieder mit $y(x; s)$. Die resultierende Funktion $F(s) = y_1(s) - 1$ hat den Graphen in Bild 12.1(a). Die zwei Nullstellen von F zeigen die Existenz zweier Lösungen der RWA, eine mit $s = -8$ (dies ist die obige Lösung (v, v')) und eine weitere mit $s \approx -35$.

Zur Bestimmung der Lösungen der RWA werden die Nullstellen von $F(s)$ mit dem Newton-Verfahren berechnet. Dazu wird in Schritt 2b) die lineare Anfangswertaufgabe

$$w' - f_y(x, y(x; s))w = 0, \quad x \in [0, 1], \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gelöst und

$$F'(s) = w_1(b)$$

gesetzt. (Dies ist die Funktionalmatrix in Schritt 2.b) für die RWA 2. Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen.) Zu den Startwerten $s^{(0)} = -9$ bzw. $s^{(0)} = -20$ ergeben sich die folgenden Werte bei der Verwendung des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung mit fester Schrittweite $h = 0.0025$.

1. Startwert $s^{(0)} = -9$:

t	s	$y_1(1)$	$F(s)$	$F'(s)$
0	-9	-0.9581431497	-1.9581431497	1.6765082649
1	-7.8320110371	1.3907350764	0.3907350764	2.3850181234
2	-7.9958400129	1.0094401468	0.0094401468	2.2706894133
3	-7.999974052	1.0000058849	0.0000058849	2.2678589067
4	-8.000000002	1.0000000000	0.0000000000	2.2678571410

2. Startwert $s^{(0)} = -20$:

t	s	$y_1(1)$	$F(s)$	$F'(s)$
0	-20	-4.8369937649	-5.8369937649	-0.2227094875
1	-46.2090036261	5.8466416666	4.8466416666	-0.5027086348
2	-36.5679484876	1.3120691986	0.3120691986	-0.4418340339
3	-35.8616443674	1.0013557989	0.0013557989	-0.4379943831
4	-35.8585488965	1.0000000261	0.0000000261	-0.4379775390
5	-35.8585488370	1.0000000000	0.0000000000	-0.4379775386

Beide Lösungen v und \tilde{v} der RWA 2. Ordnung sind in Bild 12.1(b) dargestellt.

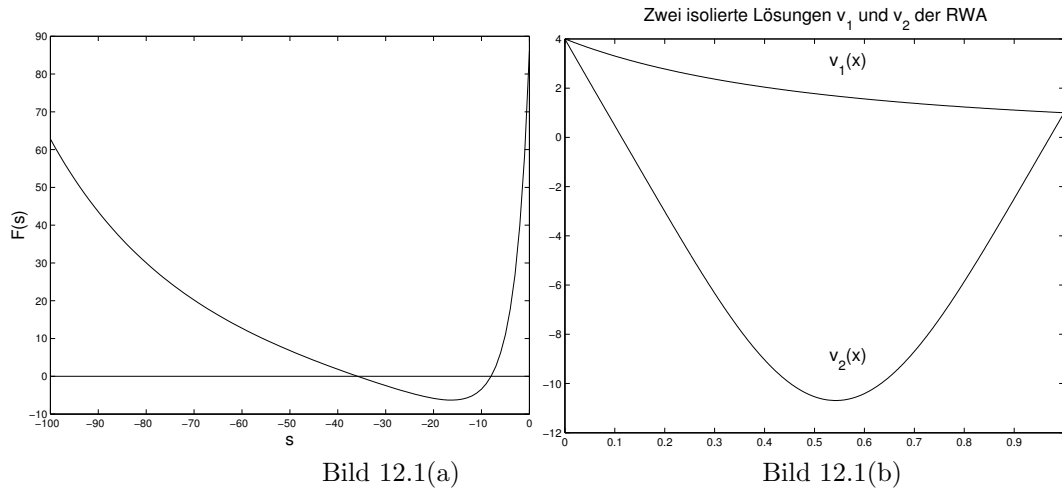
Bemerkung 12.17 (a) Zur Lösung der AWAn kann das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung herangezogen werden. Bezeichnet h die Schrittweite in Schritt 2a) des Algorithmus, so liegt die Näherung $y_k^h(s)$ zum Anfangswert $y(a) = s$ an den Stellen $x_k = a + kh$ vor. In Schritt 2b) wird diese Näherungslösung in die Funktion $f_y(x, y(x; s))$ eingesetzt. Sie wird an allen Stellen benötigt, die zur Berechnung der Steigungen des Runge-Kutta-Verfahrens auftreten. Deshalb kann Schritt 2b) mit der Schrittweite $\tilde{h} = 2h$ für das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung durchgeführt werden.

(b) Die Berechnung der Funktionalmatrix $F'(s)$ in Schritt 2.b) erfordert (i.a.) die Lösung von n zusätzlichen AWAn. Mit etwa dem gleichen Aufwand kann man $F'(s)$ approximieren durch eine Matrix von Differenzenquotienten

$$\Delta F(s) = (\Delta_1 F(s), \dots, \Delta_n F(s)),$$

$$\Delta_j F(s) = \frac{F(s_1, \dots, s_j + \Delta s_j, \dots, s_n) - F(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)}{\Delta s_j}.$$

Dies erspart das Aufstellen der linearen AWA in Schritt 2.b).



Auf die Wahl von Startwerten für das Newton-Verfahren können wir hier nicht näher eingehen. Da die Funktionalmatrix $F'(s)$ in einer lokal eindeutigen Lösung regulär ist, erwartet man, dass das Verfahren lokal quadratisch konvergiert:

$$\|s^{(t)} - \hat{s}\| \leq c \|s^{(t-1)} - \hat{s}\|^2.$$

Dies konnten wir auch in Beispiel 12.16 beobachten.

Ebenso wie bei den linearen Randwertaufgaben können sich kleine Änderungen des gewählten Anfangswertparameters s sehr verstärken bei der Auswertung des Randwerts $y(b; s)$. Auch hier wird Abhilfe durch das *Mehrfachschießverfahren* erzielt:

1. Aufteilung des Intervalls

$$a =: x_1 < x_2 < \dots < x_{R+1} := b,$$

so dass $e^{L_j(x_{j+1}-x_j)}$ moderat ist.

2a. Zu Parametern $s_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq R$, werden die Lösungen $y_j(x; x_j, s_j)$ der AWAn

$$y' = f(x, y), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad y(x_j) = s_j$$

auf den Teilintervallen bestimmt. Die Übergangsbedingungen zur Stetigkeit (und Differenzierbarkeit) der Lösung sowie die Randbedingungen werden als nichtlineares Gleichungssystem

$$F(s_1, \dots, s_R) = \begin{bmatrix} F_1(s_1, s_2) \\ \vdots \\ F_{R-1}(s_{R-1}, s_R) \\ F_R(s_1, s_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x_2; x_1, s_1) - s_2 \\ \vdots \\ y(x_R; x_{R-1}, s_{R-1}) - s_R \\ r(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)) \end{bmatrix} = 0$$

der Größe $nR \times nR$ formuliert.

2.b) Die Funktionalmatrix zu F ist

$$F'(s_1, \dots, s_R) = \begin{bmatrix} G_1 & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & -I & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_{R-1} & -I \\ A & 0 & \dots & 0 & B \end{bmatrix}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_j &= \frac{\partial}{\partial s_j} y(x_{j+1}; x_j, s_j), \quad j = 1, \dots, R-1, \\ A &= \frac{\partial}{\partial s_1} r(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)) = r_u(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)), \\ B &= \frac{\partial}{\partial s_R} r(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)) = r_v(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)) \cdot \frac{\partial}{\partial s_R} y(x_{R+1}; x_R, s_R). \end{aligned}$$

Die Matrizen G_j und B sind wieder durch Lösen entsprechender linearer Matrix-AWAn erhältlich.

2.c) Die Newton-Iteration wird durchgeführt zur Berechnung der neuen Parametervektoren s_1, \dots, s_R .

Die Einzelheiten zur Newton-Iteration sind leicht auszuführen in Analogie zum Fall des einfachen Schießverfahrens. Zur Berechnung der Iterierten $s_j^{(t+1)}$ aus $s_j^{(t)}$, $1 \leq j \leq R$, schreiben wir das lineare Gleichungssystem zur Matrix $F'(s_1, \dots, s_R)$ in der Form

$$\begin{aligned} G_1 \Delta s_1 - \Delta s_2 &= -F_1 \\ &\vdots \\ G_{R-1} \Delta s_{R-1} - \Delta s_R &= -F_{R-1} \\ A \Delta s_1 + B \Delta s_R &= -F_R \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $\Delta s_j = s_j^{(t+1)} - s_j^{(t)}$. Durch Kombination erhält man

$$\begin{aligned} \Delta s_2 &= G_1 \Delta s_1 + F_1 \\ &\vdots \\ \Delta s_R &= G_{R-1} \cdots G_1 \Delta s_1 + \sum_{j=1}^{R-1} G_{R-1} \cdots G_{j+1} F_j \end{aligned}$$

und aus der letzten Gleichung

$$[A + B G_{R-1} \cdots G_1] \Delta s_1 = w$$

mit $w = -[F_R + B F_{R-1} + B G_{R-1} F_{R-2} + \cdots + B G_{R-1} \cdots G_2 F_1]$. Das letzte Gleichungssystem für Δs_1 kann z.B. mit dem Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche gelöst werden. Die weiteren Vektoren Δs_j sind dann rekursiv wie oben angegeben zu berechnen. Die Matrix $Q := [A + B G_{R-1} \cdots G_1]$ ist in einer lokal eindeutigen Lösung $y(x)$ der RWA (also für $\hat{s}_j = y(x_j)$) regulär (Übungsaufgabe!) Also ist auch die Funktionalmatrix $F'(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_R)$ regulär und das Newton-Verfahren konvergiert lokal quadratisch.

Bemerkung: Anstatt die Teilmatrizen G_j und B der Funktionalmatrix F' (und die zugehörigen linearen AWAn) in 2.b) aufzustellen, können wieder die Matrizen der Differenzenquotienten

$$G_j \approx \Delta_j F_j(s_j, s_{j+1}) = \left[\frac{y(x_{j+1}; x_j, s_j + \Delta s_{jk}) - y(x_{j+1}; x_j, s_j)}{\Delta s_{jk}} \right]_{k=1, \dots, n}$$

und

$$B \approx r_v(s_1, y(x_{R+1}; x_R, s_R)) \cdot \left[\frac{y(x_{R+1}; x_R, s_R + \Delta s_{Rk}) - y(x_{R+1}; x_R, s_R)}{\Delta s_{Rk}} \right]_{k=1, \dots, n}$$

verwendet werden. Diese werden aus Lösungen der in 2.a) gegebenen AWAn mit modifizierten Anfangsbedingungen $y(x_j) = s_j + \Delta s_{jk}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq R$, gewonnen.

12.3 Differenzenverfahren

12.3.1 Systeme erster Ordnung

Wir behandeln hier nur die *lineare* Randwertaufgabe im \mathbb{R}^d , obwohl ähnliche Methoden auch für die Approximation lokal eindeutiger Lösungen nichtlinearer RWAn existieren. Wir führen die Notationen $L : C^1(I) \rightarrow C(I)$ für den Differentialoperator und $R : C(I) \rightarrow \mathbb{R}^d$ für den “Randwertoperator” ein und schreiben

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &:= y'(x) - A(x)y(x) = f(x), & x \in I = [a, b], \\ Ry &:= B_a y(a) + B_b y(b) = g. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Wir setzen die eindeutige Lösbarkeit voraus, also ist $B_a + B_b Y(b)$ regulär ($Y(x)$ die Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $(Ly)(x) = 0$). Speziell für $B_a = I$ und $B_b = 0$ ergibt sich die AWA

$$(Ly)(x) = f(x), \quad x \geq a, \quad y(a) = g. \quad (12.27)$$

Für ein Differenzenverfahren legen wir das äquidistante Gitter

$$x_n = a + nh, \quad 0 \leq n \leq N, \quad h = (b - a)/N,$$

zugrunde zur Berechnung der Näherungslösung $y^h = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ mit

$$y_n \approx y(x_n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Vektoren der Form y^h nennen wir Gitterfunktionen, da ihre Werte nur auf dem gegebenen Gitter vorliegen. Dann werden folgende “Diskretisierungen” eingeführt:

(a) Der Differentialoperator L wird ersetzt durch einen linearen Operator L_h der Form

$$L_h : \mathbb{R}^{(N+1)d} \rightarrow \mathbb{R}^{Nd}, \quad (L_h y^h)_n := \sum C_{nj}(h) y_j, \quad n = 1, \dots, N.$$

(b) Die rechte Seite f wird ersetzt durch die Gitterfunktion

$$F^h(h; f) = (F_1(h; f), \dots, F_N(h; f)).$$

(c) Der Randwertoperator R wird übernommen als

$$R_h : \mathbb{R}^{(N+1)d} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad L_h y^h := B_a y_0 + B_b y_N.$$

Das Operatorpaar (L_h, R_h) wird als Diskretisierung des Paares (L, R) bezeichnet. Diese Diskretisierung beinhaltet, dass die Definitionsbereiche von L_h und R_h nun endlich-dimensionale Vektorräume sind, im Gegensatz zu L und R . In dieser sehr allgemeinen Form, unter die auch die bisher behandelten Verfahren für AWAn fallen, erhalten wir so ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von y^h ,

$$\begin{cases} (L_h y^h)_n = F_n(h; f), & n = 1, \dots, N, \\ R_h y^h = g. \end{cases} \quad (12.28)$$

Die zugehörige Matrixform lautet

$$A_h y^h = \beta^h \quad (12.29)$$

mit

$$A_h = \begin{bmatrix} B_a & 0 & \cdots & B_b \\ C_{10}(h) & C_{11}(h) & \cdots & C_{1N}(h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N0}(h) & C_{N1}(h) & \cdots & C_{NN}(h) \end{bmatrix}, \quad \beta^h = \begin{bmatrix} g \\ F_1(h; f) \\ \vdots \\ F_N(h; f) \end{bmatrix}.$$

Beweis: Die Fehlerfunktion $e^h = y^h - u^h$ erfüllt

$$L_h e^h = L_h y^h - L_h u^h = F^h(h; f) - L_h u^h = -r^h.$$

Aus der Konsistenz folgt

$$\|R_h e^h\| + \max_{1 \leq n \leq N} \|r_n\| = \mathcal{O}(h^m), \quad h \rightarrow 0.$$

Die Stabilität impliziert also

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\| \leq K \left\{ \|R_h e^h\| + \max_{1 \leq n \leq N} \|(L_h e^h)_n\| \right\} = \mathcal{O}(h^m), \quad h \rightarrow 0.$$

□

Die Kernaussage dieses Abschnitts besagt, dass die Konsistenz und Stabilität des Differenzenverfahrens nicht von der Randwertfunktion R abhängt (solange die eindeutige Lösbarkeit erhalten bleibt). Insbesondere sind also alle betrachteten Differenzenverfahren für AWAn auch zur Lösung von RWAn geeignet und haben dieselbe Konvergenzordnung.

Satz 12.21 (Äquivalenzsatz) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Das Differenzenverfahren (12.28) ist konsistent mit der Ordnung $m \geq 1$ und stabil für die RWA (12.26).*
- (ii) *Das Differenzenverfahren (12.28) ist konsistent mit der Ordnung $m \geq 1$ und stabil für die AWA (12.27).*
- (iii) *Das Differenzenverfahren (12.28) ist konsistent mit der Ordnung $m \geq 1$ und stabil für jede RWA der Form*

$$(Ly)(x) = f(x), \quad \tilde{R}y := \tilde{B}_a y(a) + \tilde{B}_b y(b) = \tilde{g}$$

mit Matrizen \tilde{B}_a , \tilde{B}_b und $\tilde{R}Y = \tilde{B}_a + \tilde{B}_b Y(b)$ regulär.

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz von (i) und (iii). Dann folgt die Äquivalenz zu (ii) durch Wahl von $\tilde{B}_a = I$, $\tilde{B}_b = 0$. Außerdem ist nur die Richtung (i) \Rightarrow (iii) zu zeigen.

Die Äquivalenz der Konsistenzordnung ist klar, da der Differentialoperator L bei beiden Problemen gleich ist und die Rand- bzw. Anfangsbedingungen exakt erfüllt werden. Es bleibt also zu zeigen, dass aus der Stabilität der Matrizen A_h (also aus $\sup_h \|A_h^{-1}\| < \infty$) auch die Stabilität der Matrizen \tilde{A}_h folgt, wobei

$$\tilde{A}_h = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B}_b \\ C_{10}(h) & C_{11}(h) & \cdots & \cdots & C_{1N}(h) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C_{N0}(h) & C_{N1}(h) & \cdots & \cdots & C_{NN}(h) \end{bmatrix}.$$

1. Schritt: Mit der Differenz

$$D_h := \tilde{A}_h - A_h = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a - B_a & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B}_b - B_b \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

gilt $\tilde{A}_h = [I + D_h A_h^{-1}] A_h$. Wir führen für A_h^{-1} die Bezeichnungen

$$A_h^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{00} & \cdots & Z_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{N0} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix}$$

ein. Dann gilt mit

$$Q_{h,k} := (\tilde{B}_a - B_a)Z_{0k} + (\tilde{B}_b - B_b)Z_{Nk} = (\tilde{B}_a Z_{0k} + \tilde{B}_b Z_{Nk}) - \underbrace{(B_a Z_{0k} + B_b Z_{Nk})}_{=:\delta_{0k}I}$$

die Darstellung

$$D_h A_h^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{h,0} & \cdots & Q_{h,N} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix \tilde{A}_h ist also genau dann regulär, wenn

$$I + Q_{h,0} = \tilde{B}_a Z_{00} + \tilde{B}_b Z_{N0}$$

regulär ist.

2. *Schritt*: Nun betrachten wir die (Matrix)-RWA

$$(LZ)(x) = Z'(x) - A(x)Z(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad RZ = B_a Z(a) + B_b Z(b) = I.$$

Mit $Z(x)$ bezeichnen wir die eindeutige Lösung dieser RWA, und mit $Y(x)$ bezeichnen wir die Fundamentalmatrix zur Differentialgleichung $Y' - A(x)Y = 0$. Da die Regularität der Matrix $RY = B_a + B_b Y(b)$ vorausgesetzt wurde, gilt nach Satz 12.4 die Beziehung

$$Z(x) = Y(x) \cdot S, \quad S := (B_a + B_b Y(b))^{-1}.$$

Die Lösung der diskretisierten (Matrix)-RWA

$$L_h Z_0^h = 0, \quad R_h Z_0^h = I,$$

kennen wir bereits, denn die Gitter-(Matrix)-Funktion $Z_0^h = [Z_{10}, \dots, Z_{N0}]^T$ erfüllt ja die Gleichung

$$A_h Z_0^h = [I, 0, \dots, 0]^T.$$

Da wir die Konsistenz und Stabilität dieser RWA voraussetzen, folgt aus dem Konvergenzsatz

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|Z_{n0} - Z(x_n)\| = \mathcal{O}(h^m), \quad h \rightarrow 0.$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich daraus

$$\|(I + Q_{h,0}) - \underbrace{(\tilde{B}_a Z(a) + \tilde{B}_b Z(b))}_{=\tilde{R}Z}\| = \|\tilde{B}_a (Z_{00} - Z(a)) + \tilde{B}_b (Z_{N0} - Z(b))\| = \mathcal{O}(h^m). \quad (12.31)$$

3. *Schritt*: Auch die Regularität der Matrix $\tilde{R}Y = \tilde{B}_a + \tilde{B}_b Y(b)$ wird vorausgesetzt. Also ist

$$\tilde{R}Z = (\tilde{R}Y) \cdot S$$

regulär. Wegen (12.31) gibt es für ein beliebiges $\rho \in (0, 1)$ ein $h_\rho > 0$, so dass

$$\|(I + Q_{h,0}) - \tilde{R}Z\| \leq \frac{\rho}{\|(\tilde{R}Z)^{-1}\|}, \quad 0 < h < h_\rho.$$

Mit dem bekannten Störungslemma für reguläre Matrizen folgt dann, dass $I + Q_{h,0}$ regulär ist und

$$\|(I + Q_{h,0})^{-1}\| \leq \frac{\|(\tilde{R}Z)^{-1}\|}{1 - \rho} =: c_1.$$

Also ist $\sup_{h>0} \|(I + Q_{h,0})^{-1}\| < \infty$.

4. *Schritt:* Mit der Abkürzung $T := (I + Q_{h,0})^{-1}$ ergibt sich

$$(I + D_h A_h^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & Q_{h,1} & \cdots & Q_{h,N} \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T & -TQ_{h,1} & \cdots & -TQ_{h,N} \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt die Beziehung

$$\sup_{h>0} \|\tilde{A}_h^{-1}\| \leq \sup_{h>0} (\|A_h^{-1}\| \|(I + D_h A_h^{-1})^{-1}\|) \leq c_1 \sup_{h>0} (\|A_h^{-1}\| (1 + \max_{1 \leq k \leq N} \|Q_{h,k}\|)).$$

Aus

$$\|Q_{h,k}\| \leq \|B_a - \tilde{B}_a\| \|Z_{0k}\| + \|B_b - \tilde{B}_b\| \|Z_{Nk}\| \leq (\|B_a - \tilde{B}_a\| + \|B_b - \tilde{B}_b\|) \|A_h^{-1}\|$$

folgt schließlich die Stabilität der Matrizen \tilde{A}_h . \square