

Numerische Mathematik I

Wochenzusammenfassung der Woche 4.2. - 6.2.

Hilfssatz 2. Seien $B_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbare Matrizen für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gelte $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = E$. Wenn $B_k = Q_k R_k$ die QR-Zerlegung von B_k ist, $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = E, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = E.$$

Satz 10. Die Matrizen $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$ seien mit dem QR-Verfahren aus der Matrix $A_0 := A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ erzeugt, also für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$A_k = Q_k R_k \text{ (QR-Zerlegung)}, \quad A_{k+1} := R_k Q_k \text{ (Multiplikation)}.$$

Die Eigenwerte von A seien betragsmäßig getrennt und nicht Null,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

Wenn die Matrix $T^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $T^{-1} A T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine LR-Zerlegung besitzt, dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1. Die QR-Zerlegung $A_k = Q_k R_k$ ist weniger aufwändig, wenn die Matrix A_k eine obere Hessenbergmatrix ist. Nach Hilfssatz 1 sind mit A_k auch Q_k und $R_k Q_k =: A_{k+1}$ auch obere Hessenbergmatrizen. Man bringt daher in der Praxis A zuerst auf obere Hessenbergform, bevor man das QR-Verfahren startet.

Bemerkung 2. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt von den Größen

$$\left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

ab. Je besser also die Eigenwerte von A betragsmäßig getrennt sind, desto schneller konvergieren die Diagonalelemente gegen die Eigenwerte.

Bemerkung 3. Bekommt man (im Verlauf der Rechnung) eine gute Näherung μ für den betragskleinsten Eigenwert λ_n , dann kann man wie bei der Wielandt-Iteration statt mit dem aktuellen A_k mit $A_k - \mu E$ weiterrechnen. Das führt (vgl. inverse Iteration!) zur Konvergenzbeschleunigung. In der Praxis bestimmt man A_{k+1} aus $A_k = \left(a_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^n$ indem man

$$\begin{aligned} \text{(shift-Strategie A:)} \quad \mu &:= a_{nn}^{(k)} \quad \text{oder} \\ \text{(shift-Strategie B:)} \quad \mu &:= c_2 \quad c_1, c_2 \text{ Eigenwerte von } B_k, \quad |c_1| \geq |c_2|, \end{aligned}$$

wählt, wobei B_k die 2×2 -“rechts-unten“-Matrix von A_k ist, also

$$B_k := \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(k)} & a_{n-1,n}^{(k)} \\ a_{n,n-1}^{(k)} & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Strategie A führt in der Regel zu quadratischer, Strategie B sogar zu kubischer Konvergenz für die gegen λ_n konvergente Folge $\{a_{nn}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.