

Name, Vorname: _____ Matrikel-Nr.: _____

Unterschrift: _____ Platznummer: _____

Probeklausur zur Einführung in die Numerische Mathematik

14. Dezember 2007

Vorbemerkungen:

- 1) Bitte benutzen Sie einen schwarzen oder blauen Stift, allerdings **keinen** Bleistift.
- 2) Vervollständigen Sie unbedingt sorgfältig die Angaben am Kopf dieses Titelblatts. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, die Lösung selbständig ohne Hilfe Dritter angefertigt zu haben. Halten Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- 3) Zur Klausur sind keine Hilfsmittel mit Ausnahme von Taschenrechnern zugelassen. Bitte beachten Sie, dass nach der aktuellen Rechtsprechung bereits das Mitführen von Handys u. ä. bereits als Betrugsversuch gewertet wird.
- 4) Erlaubt ist nur ein selbsterstelltes DIN A4-Blatt.
- 5) Schreiben Sie bei jeder Aufgabe Ihre Lösung auf das jeweilige Aufgabenblatt. Sie dürfen auch die Rückseite des Aufgabenblatts benutzen und ggf. die angehängten Zusatzblätter.
- 6) Selbst wenn Sie bei Aufgaben 1–4 die richtige Lösung notiert haben, aber wenn nicht erkennbar ist, wie Sie zu dieser Lösung gekommen sind, dann können wir Ihre Lösung nicht als richtig bewerten.
- 7) Die Klausur ist bestanden, wenn von den 36 erreichbaren 18 Punkte erzielt wurden.
- 8) Die Klausurergebnisse werden am XX.XX. am Schwarzen Brett im Mathetower gegenüber von der Pförtnerloge ausgehängt.
- 9) Klausureinsicht ist am XX.XX., XX - XX Uhr im Raum 511 im Mathetower.

Bitte hier nichts eintragen:

Aufgabe	1	2	3	4	-	-	-	-	Σ
Max. Punkte	8	8	11	9	-	-	-	-	36
Erreicht					-	-	-	-	

Note: _____

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 1:

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

ist zu sich selbst invers, also $AA^{-1} = E$. (Das braucht nicht bewiesen zu werden!) Berechnen Sie die Konditionszahlen von A bzgl. der

- (i) lub_1 -Norm,
- (ii) lub_2 -Norm,
- (iii) lub_∞ -Norm
- (iv) Frobenius-Norm.

2+2+1+3 Punkte

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 2:

(i) Welche der beiden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist nicht positiv definit?

(ii) Berechnen Sie für die andere Matrix die Cholesky-Zerlegung.

1 + 7 Punkte

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 3: Bei Ausgrabungen fand man in drei Schichten Spuren von Menschen. Erste Messungen ergaben, dass Schicht 1 etwa 3,47 m unter dem heutigen Niveau liegt, Schicht 2 etwa 2,01 m und Schicht 3 etwa 1,58 m. Zur Sicherheit hat man auch die Abstände der Schichten untereinander gemessen. So waren Schicht 1 und 2 etwa 1,42 m auseinander, Schicht 1 und 3 etwa 1,92 m und Schicht 2 und 3 etwa 0,44 m. Verbessern Sie diese Messergebnisse mit der Methode der kleinsten Quadrate, indem Sie

- (i) zuerst das überbestimmte Gleichungssystem für die drei Unbekannten aufstellen,
- (ii) dann die Normalgleichungen bestimmen
- (iii) und schließlich diese lösen und das Ergebnis interpretieren.

2 + 3 + 6 Punkte

Name, Vorname:

Platznummer:

Aufgabe 4:

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) := \cos(\pi \cdot x)$, gegeben.

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_2$, das f in $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ interpoliert.

(ii) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $f - p$ im Intervall $[0, 1]$ ab, ohne die Berechnung von p aus (i) zu benutzen.

6 + 3 Punkte

Name, Vorname:

Platznummer:

Zusatzblatt: