Universität Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Wintersemester 2004/05

27.01.2005

Digitale Filter

10. Blatt

Abgabetermin: 01.02.05, in der Übung

Aufgabe 17 Bestimmen Sie alle Filter der Form

$$H_0(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

die die QMF-Bedingung

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2, \qquad |z| = 1 \text{ (oder } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

erfüllen. Geben Sie außerdem alle Filter dieser Form an, die eine doppelte Nullstelle bei $z = -1$ besitzen. (Es gibt zwei solche Filter.)

Lösung: Wegen

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ab + cd)(z^2 + z^{-2})$$

gilt die QMF-Bedingung genau dann, wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \qquad ab + cd = 0,$$

gilt. Die zweite Gleichung besagt, dass die Vektoren (a, c) und $(b, -d)$ linear abhängig sind.

Fall 1: $a = c = 0$: die QMF-Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $b^2 + d^2 = 1$, also $b \in [-1, 1]$ und $d = \sqrt{1 - b^2}$ ist.
Fall 2: $a^2 + c^2 > 0$: die QMF-Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $a^2 + c^2 \leq 1$ gilt und es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$(b, -d) = \lambda(a, c).$$

Hieraus folgt dann weiter $\lambda = \pm\sqrt{(a^2 + c^2)^{-1} - 1}$.

Für den zweiten Teil setzen wir