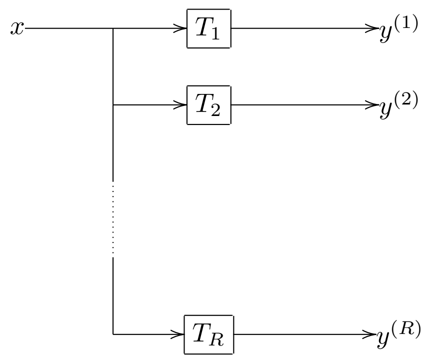
Kapitel 5

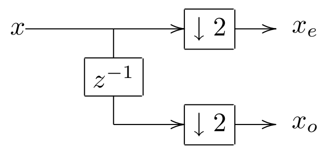
Filterbänke

Bisher wurde ein “Single-Input-Single-Output” (SISO) System bei der Betrachtung von Filtern verwendet. Treten dagegen mehrere Eingangs- und/oder Ausgangssignale auf, spricht man von Filterbänken. Eine “Single-Input-Multiple-Output” Filterbank hat dann die Form



wobei die T_i, $1 \leq i \leq R$ einzelne Filter darstellen. Entsprechend lassen sich “Multiple-Input-Single-Output” und “Multiple-Input-Multiple-Output” Filterbänke angeben.

Beispiel 5.1 (a) Die *Phasenzerlegung* in zwei Phasen ist durch das Diagramm



mit den Ausgabefolgen

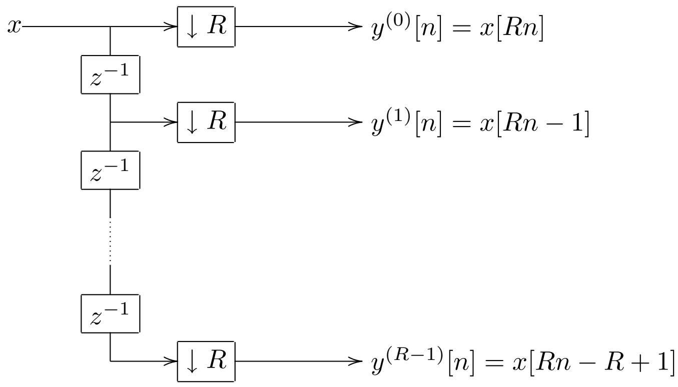
$$x_e[n] = x[2n], \qquad x_o[n] = x[2n-1], \qquad n \in \mathbb{Z},$$

gegeben. Die Z-Transformierten X_e und X_o der Ausgabefolgen ergeben sich aus

$$X_e(z^2) = \frac{1}{2}(X(z) + X(-z)), \qquad X_o(z^2) = \frac{z^{-1}}{2}(X(z) - X(-z)).$$

Beide Filter sind linear, aber nicht zeitinvariant (durch die Dezimierung). Der Dezimator wurde in

Kap. 1 definiert. Die allgemeine *Mehrphasenzerlegung* in $R \geq 2$ Phasen ist gegeben durch



Hier gilt für die Z-Transformierten der Ausgabefolgen

$$Y^{(j)}(z^R) = \frac{z^{-j}}{R} \sum_{k=0}^{R-1} e^{-ijk2\pi/R} X(e^{ik2\pi/R} z).$$

Denn: Einsetzen der Z-Transformierten von X und Vertauschen der Summationsreihenfolge (für absolut-summierbares $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{z^{-j}}{R} \sum_{k=0}^{R-1} e^{-ijk2\pi/R} X(e^{ik2\pi/R} z) &= \frac{z^{-j}}{R} \sum_{k=0}^{R-1} e^{-ijk2\pi/R} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-ikn2\pi/R} z^{-n} \\
&= \frac{z^{-j}}{R} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] \underbrace{\sum_{k=0}^{R-1} e^{ik(j+n)2\pi/R}}_{=\begin{cases} R, & \text{falls } j+n \equiv 0 (\operatorname{mod} R) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \\
&= z^{-j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[nR-j] z^{-nR+j} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[nR-j] (z^R)^{-n}.
\end{aligned}$$

Die hier auftretende Matrix $\mathcal{F} := [e^{-ijk2\pi/R}]_{j,k=0,\ldots,R-1}$ ist bekannt von der trigonometrischen Interpolation (diskrete Fourier-Transformation endlicher Folgen). Sie erfüllt die Identität $\frac{1}{R}\mathcal{F}^*\mathcal{F} = I$.

(b) Die einfachste "Tiefpass-Hochpass-Zerlegung" eines Signals $(x[n])$ ist gegeben durch Mittelwert und Differenz

$$y_1[n] = T_1 x[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}(x[2n] + x[2n-1]), \qquad y_2[n] = T_2 x[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}(x[2n] - x[2n-1]).$$

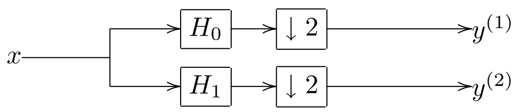
T_1 und T_2 sind lineare Filter. Die Z-Transformierten Y_1, Y_2 der Ausgabefolgen sind definiert durch

$$Y_\ell(z^2) = \frac{1}{2}(H_\ell(z) X(z) + H_\ell(-z) X(-z)), \qquad \ell = 0, 1,$$

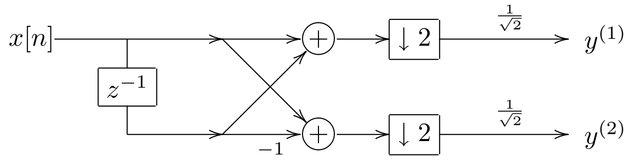
wobei

$$H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}), \quad H_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1}),$$

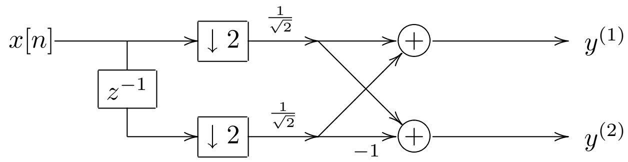
ist. Der Filter H_0 ist ein einfacher Tiefpass (wegen $H_0(e^{i\pi}) = H_0(-1) = 0$) und H_1 ist ein einfacher Hochpass (wegen $H_1(e^{i0} = H_1(1) = 0)$. Das typische Blockdiagramm einer Tiefpass-/Hochpass Filterbank ist



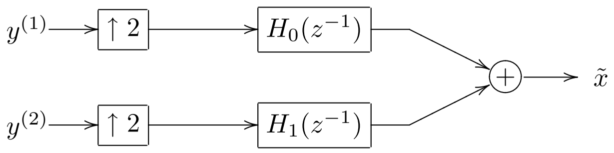
Man nennt die Filterbank auch eine "Analyse"-FB. Äquivalente Diagramme für diesen einfachen Fall sind



oder



(c) Aus den Folgen $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ der Analyse-FB aus b) lässt sich die Eingangsfolge x rekonstruieren. Hierzu wird die "Synthese-FB"



Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{x} = x$ mit dem Eingangssignal der Analyse-FB aus b) übereinstimmt.

—¿ orthogonale Filterbank, QMF Bedingung

Um die Tiefpass Eigenschaft zu realisieren, definieren wir folgende Filtertypen.

Definition 5.2 *Es sei $N \in \mathbb{N}$ und*

$$H(z) = \sum_{k=M}^{M+2N-1} h[k] z^{-k}$$

die Systemfunktion eines FIR-Filters. Der Filter heißt maximal flach*, wenn der Amplitudengang $g := |H(e^{i\xi})|$ die Bedingungen*

$$g^{(\nu)}(0) = \delta_{0\nu}, \qquad g^{(\nu)}(\pi) = 0, \qquad 0 \le \nu \le N-1,$$

erfüllt.

Bemerkung 5.3 Man beachte, dass die Definition keine Festlegung des Phasengangs vornimmt. Die Nullstelle der Ordnung N bei $\xi = \pi$ erzwingt zwar auch $H^{(\nu)}(-1) = 0$ für $0 \le \nu \le N-1$. Also wird auch die Phase 0 oder π mit entsprechender Ordnung bei $\xi = \pi$ angenommen. Dagegen besagt die Bedingung bei $\xi = 0$ nur etwas über den Amplitudengang aus. Insbesondere kann ein maximal flacher Filter $\frac{d}{d\xi} H(e^{i\xi})|_{\xi=0} \neq 0$ erfüllen. So ist z.B. für $N = 2$ der Daubechies-Filter

$$H(z) = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})z^{-1}+(3-\sqrt{3})z^{-2}+(1-\sqrt{3})z^{-3}\right) = \frac{(1+z^{-1})^2}{8}\left(1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})z^{-1}\right)$$

maximal flach von der Ordnung 2, erfüllt aber

$$8i\frac{d}{d\xi} H(e^{i\xi})|_{\xi=0} = 3+\sqrt{3}+2(3-\sqrt{3})+3(1-\sqrt{3}) \neq 0.$$

Zeichne den Phasengang!

Zur Konstruktion solcher Filter definieren wir für festes $N \in \mathbb{N}$ zunächst das sog. maximal flache Polynom P_N vom Grad $2N-1$, das die Hermite-Interpolationsbedingungen

$$P_N^{(\nu)}(0) = \delta_{0\nu}, \qquad P_N^{(\nu)}(1) = 0, \qquad 0 \le \nu \le N-1,$$

erfüllt. Hierdurch ist P_N eindeutig bestimmt. Außerdem ist

$$P_N(y) + P_N(1-y) \equiv 1,$$

weil das Polynom Q auf der linken Seite die Interpolationsbedingungen $Q^{(\nu)}(0) = Q^{(\nu)}(1) = \delta_{0\nu}$ erfüllt, also aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe mit dem konstanten Polynom $Q \equiv 1$ übereinstimmt. In geschlossener Form erhalten wir

$$P_N(y) = (1-y)^N \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k = \sum_{k=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (1-y)^k y^{2N-1-k}.$$

Beachte: P_N ist die Hälfte der Bernstein-Bézier Darstellung der konstanten Funktion 1.

Um zu *maximal flachen* Filtern zu gelangen, setzen wir für $y \in [0,1]$ und $\xi \in [0,\pi]$ sowie $z = e^{i\xi}$

$$y = \frac{1-\cos\xi}{2} = \frac{1}{4}(2 - z - z^{-1}) = -z\left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^2,$$

also

$$1 - y = \frac{1+\cos\xi}{2} = \frac{1}{4}(2 + z + z^{-1}) = z\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2.$$

Dann definieren wir

$$H_N(z) = \sum_{k=-2N+1}^{2N-1} h_N[k] z^{-k} := P_N(y) = z^N \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} (-1)^k z^k \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^{2k}.$$

Anhand dieser Darstellung sieht man sofort, dass H_N eine Nullstelle der Ordnung $2N$ bei $z = -1$ hat. Wegen $H_N(z) + H_N(-z) = P_N(y) + P_N(1-y) \equiv 1$ folgt dann

$$H_N^{(\nu)}(1) = \delta_{0\nu}, \quad H_N^{(\nu)}(-1) = 0, \quad 0 \le \nu \le 2N-1.$$

Proposition 5.4 *H_N ist ein maximal flacher Filter der Ordnung $2N$.*

Bemerkung 5.5 Per Konstruktion ist $H_N(z) = H_N(1/z)$ und $H_N(z) \ge 0$ für alle $z = e^{i\xi}$. Mit diesen Zusatzeigenschaften ist H_N der einzige maximal flache Filter H der Ordnung $2N$ mit reellen Koeffizienten: Weil der Phasengang solcher Filter konstant 0 ist, folgt aus der Definition 5.2, dass H die $4N$ Interpolationsbedingungen $H^{(\nu)}(1) = \delta_{0\nu}$, $H^{(\nu)}(-1) = 0$, $0 \le \nu \le 2N-1$, erfüllt. Dadurch ist H eindeutig bestimmt, denn $z^{2N-1}H$ ist ein Polynom des Grades $4N-2$. Man beachte noch die Darstellungen

$$H_N(z) = h_N[0] + \sum_{k=1}^{2N-1} h_N[k](z^k + z^{-k}) = c_0 + \sum_{k=1}^{2N-1} c_k (2 - z - z^{-1})^k,$$

wobei c_k die Koeffizienten des Polynoms P_N in seiner üblichen Entwicklung nach Potenzen von y ist.

Aufgrund der soeben erwähnten Eigenschaften existieren FIR-Filter

$$H_0(z) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_0[k] z^{-k} = \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{N-1} c_k z^{-k}, \quad H_0(1) = \sqrt{2}, \quad h_0[k] \in \mathbb{R},$$

so dass

$$|H_0(z)|^2 = 2H_N(z), \quad z = e^{i\xi},$$

gilt. Der Filter H_0 ist etwa durch die spektrale Faktorisierung (Aufteilen der Nullstellenpaare (z_k, z_k^{-1}) von H_N auf $H_0(z)$ bzw. $H_0(1/z)$) zu bestimmen (s. auch Satz von Féjer-Riesz). Aufgrund der Konstruktion erfüllt H_0 die QMF-Bedingung

$$H_0(z)H_0(1/z) + H_0(-z)H_0(-1/z) = 2.$$

Außerdem gilt $H_0^{(\nu)}(-1) = 0$ für $0 \leq \nu \leq N-1$, und daraus folgt für den Amplitudengang $g(\xi) := |H_0(e^{i\xi})|$

$$g^{(\nu)}(0) = \delta_{0\nu}\sqrt{2}, \quad g^{(\nu)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq N-1.$$

Wir haben also (bis auf Multiplikation mit $\sqrt{2}$) einen maximal flachen Filter der Ordnung N mit reellen Koeffizienten gefunden, der gleichzeitig die QMF-Bedingung einer orthogonalen Filterbank erfüllt. Dies ist das Kernstück der Definition der *orthogonalen Daubechies-Wavelets* (I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992), die weitreichende Anwendungen in der Signalverarbeitung gefunden haben.