Technische Universität Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Tobias Springer

Wintersemester 2007/08

28.01.2008

Approximationstheorie

14. Übungsblatt

Abgabetermin: 04.02.08, 16 Uhr

Aufgabe 39 Der Schoenberg-Operator $S : C[a,b] \to \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$ zur Basis der B-Splines $N_{r,k}$, $-r+1 \leq k \leq n$, und gegebener Knotenfolge

$$X = \{x_{-r+1} = \cdots = x_0 = a < x_1 \leq \cdots \leq x_n < x_{n+1} = \cdots = x_{n+r} = b\}$$

lautet

$$Sf(t) = \sum_{k=-r+1}^{n} f(\gamma_{r,k}) N_{r,k}(t)$$

mit den *Greville-Abszissen*

$$\gamma_{r,k} = \frac{x_{k+1} + \cdots + x_{k+r-1}}{r-1} \quad ,k = -r+1, \ldots, n$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) S ist ein positiver Operator ($f \geq 0 \Rightarrow Sf \geq 0$).

b) Der Schoenberg-Operator stellt eine Verallgemeinerung des Bernstein-Operators dar: Im Fall $a = 0$, $b = 1$, $n = 0$ sind die Bernstein-Grundpolynome identisch zu den B-Splines und die Greville-Abszissen stimmen mit den Stützstellen des Bernstein-Operators überein.

c) Im Fall $r = 2$ ist $Sf(t) = \sum_{k=-1}^{n} f(x_{k+1}) N_{2,k}(t)$ und für $f \in C^2[a,b]$ gilt die Abschätzung

$$\|f - Sf\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|f''\|_\infty$$

mit $h := max\{x_{k+1} - x_k : 0 \leq k \leq n\}$

Aufgabe 40 Berechnen Sie für verschiedene Knotenkombinationen (äquidistant, zufällig, mit Vielfachheit am Rand,...) und $r = 3, 4$ die Norm $\left\|C_X^{-1}\right\|_\infty$ der Inversen der Kollokationsmatrix, wenn die Greville-Abszissen als Interpolationsstellen gewhlt werden.