

## Approximationstheorie

### 1. Übungsblatt

Abgabetermin: 22.10.07

#### Aufgabe 1

Stellen Sie die wichtigsten Aussagen zu den

- Tschebyscheff-Polynomen (1. Art),
- Legendre-Polynomen

auf dem Intervall  $[-1, 1]$  auf maximal je einer DinA4 Seite zusammen. Sie können Ihr Numerik-Skript, -Buch, eine Formelsammlung oder das umfassende Werk von Abramowitz und Stegun (s. unten) verwenden.

#### Aufgabe 2

- Verwenden Sie die Rekursionsformel zur Bestimmung der Tschebyscheff-Polynome  $T_k$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ . Skizzieren Sie diese Polynome auf dem Intervall  $[-1, 1]$  (die Verwendung von Matlab ist ausdrücklich erlaubt).
- Die Funktion  $f(t) = 1/t$  soll auf dem Intervall  $[b, c]$ ,  $0 < b < c$ , in eine Tschebyscheff-Reihe entwickelt werden. Geben Sie die lineare Koordinatentransformation  $x(t) = \gamma t + \delta$  von  $[b, c]$  auf  $[-1, 1]$  an und stellen Sie mit Hilfe von Gleichung (1.4) der Vorlesung die Tschebyscheff-Reihe von  $f$  auf dem Intervall  $[b, c]$  auf.

#### Aufgabe 3

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  ist diagonalisierbar; ihre Eigenwerte liegen im Intervall  $[1, 3]$  (Grund: Gerschgorin-Kreise). Die Tschebyscheff-Reihe aus Aufgabe 2 zum Intervall  $[1, 3]$  liefert, durch Einsetzen der Matrix  $A$  für die Variable  $t$ , die Inverse von  $A$ . Berechnen Sie die ersten 4 Partialsummen  $S_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , dieser Reihe sowie die Fehler  $\|A^{-1} - S_k\|_\infty$  in der Zeilensummennorm.

#### Aufgabe 4

Wir betrachten den Vektorraum  $C([a, b])$  der stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) mit zwei unterschiedlichen Normen, nämlich

- der Maximumnorm  $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,
- der  $L_2$ -norm  $\|f\|_2 := \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .

Beweisen Sie:

a) Für alle  $f \in C[a, b]$  gilt:

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty.$$

b) Es gibt keine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $f \in C[a, b]$  gilt:

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2.$$

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York, 1965.

## Organisatorisches

- Die Übungsblätter und weitere Informationen stehen auch online zur Verfügung:  
[www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx07](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx07)
- Scheine werden aufgrund der aktiven Teilnahme an den Übungen, der sinnvollen Bearbeitung der Übungsaufgaben und einer 10-20 minütigen mündlichen Prüfung im Anschluss an die Veranstaltung vergeben.
- Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich auf getrennten Blättern ab, die mit Ihrem Namen versehen sind.
- Die Übungsblätter werden jeweils in der Mittwochsvorlesung ausgeteilt. Sie haben dann 5 Tage Zeit für die Bearbeitung der gestellten Aufgaben.
- Wer einen Rechnerzugang im CIP-Pool benötigt, melde sich bitte per email oder persönlich im Anschluss an die Vorlesung bzw. Übung.