Universität Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dipl.–Math. Laura Beutel

Wintersemester 2002/03

11.12.2002

Approximationstheorie

9. Blatt

Abgabetermin: 17.11.02, 12.00, Aufgabenkasten Nr. 73

Aufgabe 33 (2+2 Punkte)
Für kompakte Intervalle $I_1,\ I_2 \subset \mathbb{R}$, Funktionen $f \in C(I_1 \times I_2)$ und $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+$ definieren wir den r-ten totalen Stetigkeitsmodul durch

$$\omega_r(f;\delta_1,\delta_2) \ := \ \sup\left\{\left|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}\cdot f(x+\nu h_1, y+\nu h_2)\right| : \right.$$
$$\left. (x,y),(x+rh_1,y+rh_2) \in I_1 \times I_2,\ |h_1| \le \delta_1,\ |h_2| \le \delta_2\right\}.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\forall \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}_0,\ \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\omega_r(f; n_1\delta_1, n_2\delta_2) \le p^r \cdot \omega_r\left(f; \frac{n_1\delta_1}{p}, \frac{n_2\delta_2}{p}\right).$$

b) $\forall \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$\omega_r(f;\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2) \le (1+\max\{]\lambda_1[,]\lambda_2[\})^r \cdot \omega_r(f;\delta_1,\delta_2),$$

wobei $]\lambda[= \max\{z \in \mathbb{Z} \,:\, z < \lambda\}$.

Aufgabe 34 (2+2 Punkte)
Diskrete Version des Remez–Algorithmus
a) Sei $\mathcal{A}$ ein endlich–dimensionaler Unterraum von $C[a,b]$, der die Haar–Bedingung erfüllt. Sei $\{x_i,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Punkten aus $[a,b]$, wobei m nicht kleiner ist als die Dimension von $\mathcal{A}$. Für jedes $f \in C[a,b]$ bestimmt man mit Hilfe des Remez–Algorithmus das Element p aus $\mathcal{A}$, welches den maximalen diskreten Fehler

$$\max_{i=1,2,\cdots,m} |f(x_i) - p(x_i)|$$

minimiert. Begründen Sie, dass diese Approximation an f in endlich vielen Schritten erhalten wird.
Tip: In diesem Fall gibt es nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Referenzen.

b) Bestimmen Sie die beste Approximation aus $\mathcal{P}_1$ zu folgenden Funktionenwerte:

$$f(0) = 0.3,\ f(1) = 4.2,\ f(2) = 0.1,\ f(3) = 3.4,\ f(4) = 5.7,\ f(5) = 4.9,\ f(6) = 5.7\ .$$

Sei $\{0, 3, 6\}$ die Startreferenz.

Aufgabe 35 (2 Punkte)
Sei $f \in C^r(K)$ und $\tau : K \to \tilde{K}$ die affine Transformation $\tau(x) = Ax + b$, wobei A eine invertierbare Matrix ist. Dann gilt für alle $f \in C^r(K)$ und $\tilde{f} := f \circ \tau \in C^r(\tilde{K})$

$$|\tilde{f}|_{r,\tilde{K}} \leq h^r |f|_{r,K}\ ,$$

wobei $h := \|A\|_1$ die Spaltensummennorm von A bezeichnet.

Aufgabe 36 (2+2 Punkte)
Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

a) Finden Sie ein Polynom $p \in \mathcal{P}_2^2$, für das gilt:

$$\left\| \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \right\|_{\infty,K} > 4 \cdot \|p\|_{\infty,K}.$$

b) Konstruieren Sie eine Folge von Polynomen $(p_n)_n$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n^2$ und $\|p_n\|_\infty = 1$, $n \in \mathbb{N}$, für die

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left\| \left[\left(\frac{\partial p_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \right\|_{\infty,K} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$