Universität Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dipl.–Math. Laura Beutel

Wintersemester 2002/03

16.10.2002

Approximationstheorie

1. Blatt

Abgabetermin: 22.10.02, 12.00, Aufgabenkasten Nr. 73

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Wiederholen Sie die wichtigsten Eigenschaften der

a) Tschebyscheff–Polynome,

b) Legendre–Polynome,

(z.B. aus dem Numerik–Skript, aus einem Numerik–Buch, aus einer Formelsammlung, oder aus Kapitel 22 in [1]).

Erstellen Sie jeweils für Punkt a) und Punkt b) eine Übersicht dieser Eigenschaften in tabellarischer Form (von maximal einer DinA4–Seite).

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)
Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ unter der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

a) Zeigen Sie, dass mit Hilfe einer linearen, bijektiven Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, durch $\|x\| := \|Ax\|_2$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

b) Beweisen Sie, dass für zwei reelle Zahlen a, b mit $a > 0$ und $b > 0$ durch

$$\|x\| := \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Wie sieht die Einheitskugel $V := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| \leq 1\}$ aus?

Aufgabe 3 (1+3+3 Punkte)
Mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnen wir die Maximum–Norm auf dem $\mathbb{R}^n$; für $i = 1, 2, \infty$ sei dann V_i definiert durch $V_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\|_i \leq 1\}$.

a) Zeichnen Sie die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|\cdot\|_i$ für $i = 1, 2, \infty$.

b) Bestimmen Sie alle Minimallösungen für $\binom{2}{0} \in \mathbb{R}^2$ in V_i bzgl. der Norm $\|\cdot\|_i$ ($i = 1, 2, \infty$).

c) Führen Sie die entsprechende Aufgabe für $\binom{2}{2} \in \mathbb{R}^2$ an Stelle von $\binom{2}{0}$ durch.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)
Die erzeugende Funktion der Legendre–Polynome P_n auf dem Intervall $[-1,1]$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P_n(x),$$

für $|z| < 1$ und $x \in (-1,1)$, (s. [1, Seite 783]). Hierbei ist P_n normiert durch $P_n(1) = 1$.

a) Mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, setze $z := a - \sqrt{a^2-1} =: \beta$ und forme obige Gleichung auf

$$\frac{1}{\sqrt{a-x}} = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_n(x)$$

um. Die Konstanten C und C_n hängen nur von a (bzw. von β) ab und sind genau zu bestimmen.

b) Schreiben Sie das Polynom $p_n^{(L)}$ explizit auf und berechnen Sie den Fehler

$$E_n^{(L)} := \left\| \frac{1}{\sqrt{a-x}} - p_n^{(L)}(x) \right\|_{\infty,[-1,1]}$$

exakt.

References

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publ. 1965.

Organisatorisches

- Scheine werden vergeben; dafür zählen: die Abgabe der Lösungen, die aktive Teilnahme an den Übungen und die Klausur (oder die mündliche Prüfung).
- Jede Aufgabe soll auf einem getrennten Blatt gelöst werden. Auf jedem Blatt soll Ihr Name und die Aufgabennummer stehen.
- **Die Lösungen sollen unbedingt sauber und vollständig aufgeschrieben werden; "Schmierzettel" werden definitiv nicht korrigiert!**
- Die Übungsblätter werden jeweils Mittwochs (am Anfang der Übungsstunde) verteilt. Die Aufgaben sollen dann bis zum nächsten Dienstag bearbeitet werden.