

Symbolisches Rechnen

13. Übung

Aufgabe 37

Beim Lösen der Gleichung $y^3 - 5y - 2 = 0$ mit Hilfe der Formel von Cardano erhält man die Ausdrücke

$$u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-\frac{98}{27}}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-\frac{98}{27}}}.$$

Zeigen Sie, dass $u + v = 2$ gilt.

4 Punkte

Aufgabe 38

Es sei

$$A = \frac{5 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}}.$$

- (i) Berechnen Sie für A eine Darstellung der Form $A = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$ mit $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{Q}$.
- (ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede algebraische Körpererweiterung eine einfache algebraische Körpererweiterung ist. Berechnen Sie ein $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\alpha)$ und für A eine Darstellung $A = b_1 + b_2\alpha$.

5 Punkte

Aufgabe 39

Es sei $\mathfrak{a} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ mit

$$f_1 := x^2 + y^2 - 1, \quad f_2 := xy, \quad f_3 := y^3 - y.$$

Die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist eine Gröbnerbasis von \mathfrak{a} bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung mit $y <_{dl} x$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Normalmenge $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ unabhängig von der Termordnung immer aus 4 Elementen besteht.
- (ii) Berechnen Sie mit linearen Methoden eine Gröbnerbasis von \mathfrak{a} bezüglich der lexikographischen Termordnung mit $x <_{LEX} y$.

6 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 28.01.2010 bis 10 Uhr.