Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dr. M. Charina

Dortmund, 16.04.2007

Mathematik II für Informatiker
Musterlösung zur 2. Übung

Aufgabe 5

Nach dem Satz 4.2.28 existiert mindestens ein $\tilde{x}$ im Innern des Intervalls $[-1, 0]$ mit $f(\tilde{x}) = 0$, da f stetig ist und $f(-1) = -1 < 0 < f(0) = 1$ gilt.

Bisektionsverfahren:

1.Schritt: $f(-\frac{1}{2}) = 0,46875 > 0 \quad \Longrightarrow -1 < \tilde{x} < -\frac{1}{2}$

2.Schritt: $f(-\frac{3}{4}) = 0,01269\ldots > 0 \quad \Longrightarrow -1 < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

3.Schritt: $f(-\frac{7}{8}) = -0,3879\ldots < 0 \quad \Longrightarrow -0.875 = -\frac{7}{8} < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

4.Schritt: $f(-\frac{13}{16}) = -0,16659\ldots < 0 \quad \Longrightarrow -0.8125 = -\frac{13}{16} < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

5.Schritt: $f(-\frac{25}{32}) = -0,072288\ldots < 0 \quad \Longrightarrow -0.78125 = -\frac{25}{32} < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

6.Schritt: $f(-\frac{49}{64}) = -0,02870\ldots < 0 \quad \Longrightarrow -0.765625 = -\frac{49}{64} < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

7.Schritt: $f(-\frac{97}{128}) = -0,00773\ldots < 0 \quad \Longrightarrow -0.7578125 = -\frac{97}{128} < \tilde{x} < -\frac{3}{4} = -0.75$

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|$.

z.z.: f ist Lipschitz-stetig bzgl. jedes $L \geq 1$.

(d.h. z.z: Für alle $L \geq 1$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq L|z_1 - z_2|$.)

Beweis: Sei $L \geq 1$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Die Dreiecksungleichung besagt

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Also gilt

$$|a + b| - |b| \leq |a| \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Setze $a = z_1 - z_2$ und $b = z_2$. Dann ergibt sich

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Für $a = z_2 - z_1$ und $b = z_1$ ergibt sich

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

Wegen $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ und $-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2|$ gilt auch

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2| \leq L|z_1 - z_2| \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 7

Behauptung: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
Beweis: Mit der Reihenentwicklung von $\sin(x)$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

bekommt man die Reihenentwicklung von $\frac{\sin(x)}{x}$,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

Diese Potenzreihe ist stetig nach Satz 4.2.17, insbesondere stetig in $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1.$$

Behauptung: $\lim_{x \to 0} (x \cdot \sin(x)) = 0$.

Beweis: Wir zeigen, dass $x \cdot \sin(x)$ stetig in $x_0 = 0$ ist. (Aus $x_0 \cdot \sin(x_0) = 0$ für $x_0 = 0$ folgt dann die Behauptung.)
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|x \cdot \sin(x) - x_0 \cdot \sin(x_0)| = |x \cdot \sin(x)| = |x| \cdot |\sin(x)| \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon,$$

da $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8

$f(x)$	D	W	$\lim_{x \to \infty} f(x)$	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$f(x) = 0$
$\sin(x + \pi)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	existiert nicht	existiert nicht	$k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos 2x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	existiert nicht	existiert nicht	$\pi/4 + k \cdot \pi/2, k \in \mathbb{Z}$
$-4 + \ln x$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$	∞	nicht definiert	e^4