

Mathematik II für Informatiker  
Musterlösung für Blatt 1

**Aufgabe 1**

a) Die Funktion  $f$  ist definiert für  $|z| < 3$  mit (geometrische Reihe!)

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{3}{3 - z}.$$

Entsprechend gilt für  $|z| < 6$

$$g(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{6}} = \frac{6}{6 - z}.$$

Daher kann man (zumindest) für  $|z| < 3$  schreiben

$$h(z) := f(z)g(z) = \frac{3 \cdot 6}{(3 - z)(6 - z)} = \frac{18}{18 - 9z + z^2}.$$

N.B.: Für  $|z| \geq 3$  konvergiert die Potenzreihe von  $f$  nicht. Damit ist  $h$  nicht für  $|z| \geq 3$  definiert!

b) Das Cauchy-Produkt der Potenzreihen von  $f$  und  $g$  ist für  $|z| < 3$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit

$$\begin{aligned} c_n &:= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (2 - 2^{-n}) = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{6^n}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die zum Beweis der Konvergenz der geometrischen Reihe benötigte Identität

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

mit  $q = \frac{1}{2}$  verwendet.

Der Konvergenzradius ist 3, da die Potenzreihen von  $f$  und  $g$  für  $|z| < 3$  konvergieren.

**Aufgabe 2**

Zu  $g \in \mathbb{N}$  mit  $g > 1$  ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$$

die  $g$ -adische Darstellung von  $x$ , wenn  $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k}$ . (Man beachte, dass die Summation bei  $k = 1$  beginnt und nicht bei  $k = 0$ !)



### Aufgabe 3

a) Wegen  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  ist

$$\frac{\exp(x)}{x^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^{k-n} + \frac{1}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k-n}.$$

Für  $x \rightarrow \infty$  konvergiert der erste Summand gegen 0, der zweite ist konstant  $\frac{1}{n!}$  und der dritte konvergiert gegen  $\infty$ . Insgesamt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty.$$

Für  $x \rightarrow -\infty$  substituiert man  $y := -x$ . Dann folgt  $y \rightarrow \infty$  und

$$\frac{\exp(x)}{x^{-n}} = x^n \exp(x) = (-1)^n y^n \frac{1}{\exp(y)}.$$

Wegen  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\exp(y)}{y^n} = \infty$  nach Teil a) folgt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(x)}{x^{-n}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n y^n}{\exp(y)} = 0.$$

b) Für alle  $f \in \mathcal{O}(f^{(0)})$  gilt nach Definition

$$f \in \mathcal{O}(f^{(0)}) \Rightarrow \exists M_0 > 0 : \frac{f_n}{1} \leq M_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{O}(f^{(0)})$  ist also die Menge der nach oben beschränkten Folgen. Entsprechend

$$f \in \mathcal{O}(f^{(1)}) \Rightarrow \exists M_1 > 0 : \frac{f_n}{n} \leq M_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{O}(f^{(1)})$  ist also die Menge aller Folgen  $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  mit  $f_n \leq M_1 \cdot n$  für ein  $M_1 > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$f_n \leq M_0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n \leq M_0 \cdot n \forall n \in \mathbb{N}$$

sind die nach oben beschränkten Folgen alle in  $\mathcal{O}(f^{(1)})$ .

Genauso zeigt man die Inklusion  $\mathcal{O}(f^{(1)}) \subseteq \mathcal{O}(f^{(2)})$ .

Für  $\mathcal{O}(f^{(2)}) \subseteq \mathcal{O}(g)$  muss man zeigen, dass es für beliebige Folgen  $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{O}(f^{(2)})$  Zahlen  $M_2$  und  $M_3$  gibt mit

$$f_n \leq n^2 M_2 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n \leq e^n M_3 \forall n \in \mathbb{N}.$$

$M_2$  existiert nach Definition von  $\mathcal{O}(f^{(2)})$ .

Mit vollst. Induktion zeigt man  $n^2 < e^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (denn  $n = 1 \Rightarrow 1^2 < e^1 = 2, 71 \dots$  und wegen  $e > 2$  ist  $e^{n+1} > 2e^n$  sowie

$$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k > \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} n^k = 1 + n + \frac{1}{2} n^2,$$

zusammen also  $e^{n+1} > 2e^n > 2(1 + n + \frac{1}{2} n^2) = 1 + (n+1)^2 > (n+1)^2$ .) Daher kann man als  $M_3$  die Zahl  $M_2$  wählen.

## Aufgabe 4

a) Die Nullstellen des Nenners  $h$  sind wegen

$$h(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

die Zahlen 1,  $-2$ , und 3. Dort (und nur dort) kann  $f(x)$  nicht definiert werden. Somit ist der größtmögliche Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}.$$

Auch das Zählerpolynom kann faktorisiert werden,

$$g(x) = (x + 1)(x + 2)^2(x - 3).$$

Daher gilt für alle  $x \in D$

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x + 2)^2(x - 3)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{x - 1}.$$

Hieraus folgt

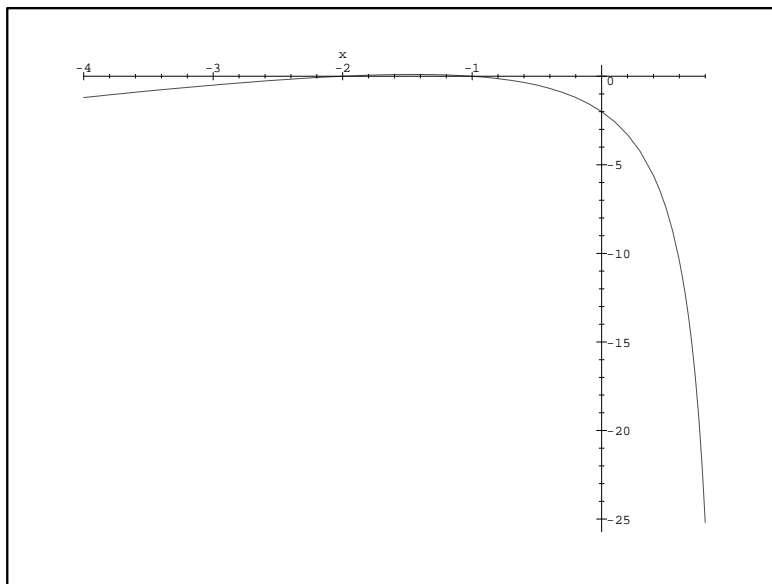
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) &= 10, & \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) &= 10. \end{aligned}$$

b) Weil rechts- und linksseitiger Grenzwert in  $-2$  und 3 übereinstimmen, kann man dort  $f$  stetig ergänzen durch

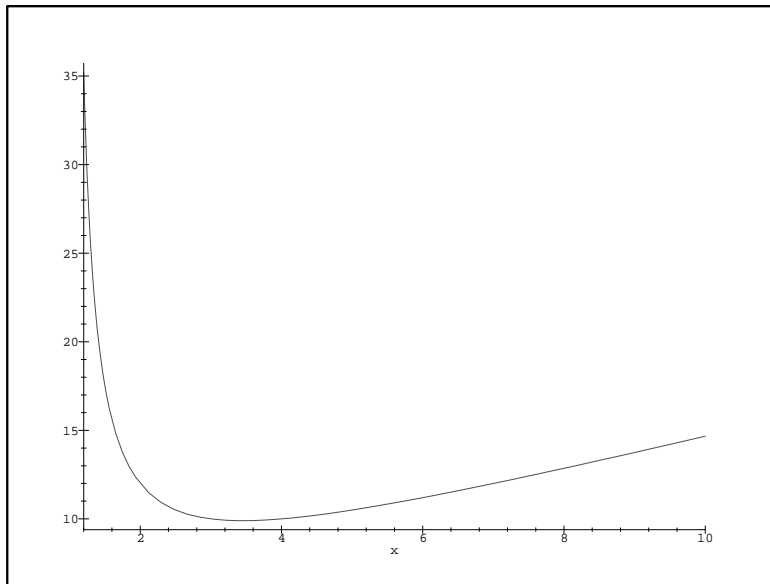
$$f(-2) := 0, \quad f(3) := 10.$$

c)

> `plot((x^4 + 2*x^3 - 7*x^2 - 20*x - 12)/(x^3 - 2*x^2 - 5*x + 6), x=-4..0.8);`



> `plot((x^4 + 2*x^3 - 7*x^2 - 20*x - 12)/(x^3 - 2*x^2 - 5*x + 6), x=1.2..10);`



**Bemerkung:** Aus technischen Gründen haben wir hier also  $f$  nur im Intervall  $[-4, 0,8]$  (erstes Bild) und im Intervall  $[1,2, 10]$  (zweites Bild) mit MAPLE gezeichnet. Im Intervall  $[0,8, 1,2]$  sind die Funktionswerte betragsmäßig zu groß. Hätten wir etwa nur das Intervall  $[0,9, 1,1]$  ausgespart, so wären bedingt durch die großen Funktionswerte in  $[1,1, 1,2]$  bzw. die kleinen in  $[0,8, 0,9]$  die Werte außerhalb von  $[0,8, 1,2]$  praktisch nicht mehr von 0 zu unterscheiden.