Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dr. Maria Charina

Dortmund, den 3. 4. 2007

Mathematik für Informatiker II

1. Übung

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Man betrachte die beiden Potenzreihen
$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{6}\right)^n$.

a) Zeigen Sie, dass für das Produkt $h(z) := f(z)g(z)$ gilt

$$h(z) = \frac{18}{z^2 - 9z + 18}.$$

b) Bestimmen Sie die Potenzreihe von h und ihren Konvergenzradius.

Aufgabe 2 (3+2+1 Punkte)

Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g > 1$. Man nennt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{-k} \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$$

die g-adische Darstellung der reellen Zahl x, wenn $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{-k}$.

a) Schreiben Sie $\frac{3}{4}$ als g-adische Zahl für $g = 3,\ g = 4$ und $g = 5$.

b) Zeigen Sie, dass jedes x mit g-adischer Darstellung im Intervall $[0, 1)$ liegt.

c) Beweisen Sie $\sum_{k=n+1}^{\infty} (g-1)g^{-k} = g^{-n}$.

Aufgabe 3 (2+1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{exp(x)}{x^{-n}} = 0.$$

b) Betrachten Sie die Folgen $f^{(k)} := \{n^k\}_{n=1}^{\infty}$ $k = 0, 1, 2,$ und $g := \{exp(n)\}_{n=1}^{\infty}$
Zeigen Sie

$$\mathcal{O}(f^{(0)}) \subseteq \mathcal{O}(f^{(1)}) \subseteq \mathcal{O}(f^{(2)}) \subseteq \mathcal{O}(g).$$

Aufgabe 4 (3+2+1 Punkte)

Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}$ mit

$$g(x) := x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12, \quad h(x) := x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f an und bestimmen Sie für alle Nullstellen a von h die Grenzwerte

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a-0} f(x).$$

b) In welchen der Nullstellen von h besitzt f eine stetige Fortsetzung?
c) Skizzieren Sie den Graph von f.

Abgabe: Dienstag, 10.04. bis 16.15 Uhr in den Briefkästen im Mathegebäude.