Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dr. M. Charina

Dortmund, 5.10.2007

Fachprüfung Mathematik II
am 4. Oktober 2007
Lösungen

Aufgabe 1

(i)

$$\begin{aligned} & F(x) := x\ ln(x) - x \\ \Rightarrow\quad & F'(x) = ln(x) + x\ \tfrac{1}{x} - 1 = ln(x). \end{aligned}$$

Also ist F Stammfunktion zu f. Es gilt

$$\int_0^1 ln(x)\ dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 ln(x)\ dx = F(1) - \lim_{x\to 0} F(a).$$

Nach l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} x\ ln(x) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Daher also

$$\int_0^1 ln(x)\ dx = F(1) - \lim_{x\to 0} F(a) = -1 - 0 = -1.$$

(ii) Die Funktion $g : x \mapsto x^2$ ist für $x > 0$ monoton wachsend. Daher nimmt im Intervall $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ die Funktion g ihr Maximum im Randpunkt $\frac{k+1}{n}$ an und ihr Minimum im anderen Randpunkt $\frac{k}{n}$. Obersumme daher (Intervallbreite jedes Streifens ist ja $\frac{1}{n}$)

$$Int_0^1 g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k+1}{n})\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Für $n \to \infty$ konvergieren die Obersummen,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Entsprechend für die Untersummen

$$int_0^1 g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

und analog

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\Big(\cos(\pi x)\Big) \\ f'(x) &= \cos\Big(\cos(\pi x)\Big)\cdot\Big(-\sin(\pi x)\Big)\cdot\pi, \\ f''(x) &= -\sin\Big(\cos(\pi x)\Big)\Big(\sin(\pi x)\Big)^2\cdot\pi^2-\cos\Big(\cos(\pi x)\Big)\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi^2. \end{aligned}$$

Damit folgt wegen $\sin(\pi)=0$ und $\cos(\pi)=-1$

$$f(1)=\sin(cos(\pi))=\sin(-1),\quad f'(1)=0,\quad f''(1)=\cos(-1)\pi^2.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} T_{1,f}(x) = &\ f(1)+f'(1)(x-1)=f(1)=\sin(-1), \\ T_{2,f}(x) = &\ T_{1,f}(x)+-\tfrac{1}{2}f''(1)(x-1)^2=\sin(-1)+\tfrac{\pi^2}{2}\cos(-1)(x-1)^2. \end{aligned}$$

(ii) Für beliebige $y\in\mathbb{R}$ gelten (wegen $|\cos(t)|\le 1$ und $|\sin(t)|\le 1$) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f''(y)| &= |\sin\Big(\cos(\pi y)\Big)\Big(\sin(\pi y)\Big)^2\cdot\pi^2-\cos\Big(\cos(\pi y)\Big)\cdot\cos(\pi y)\cdot\pi^2| \\ &\le |\sin\Big(\cos(\pi y)\Big)|\cdot|\Big(\sin(\pi y)\Big)^2|\cdot\pi^2+|\cos\Big(\cos(\pi y)\Big)|\cdot|\cos(\pi y)|\cdot\pi^2\le 2\pi^2 \\ |f''(y)| &= |\cos\Big(\cos(\pi y)\Big)\Big(\sin(\pi y)\Big)^3\pi^3-3\sin\Big(\cos(\pi y)\Big)\sin(\pi y)\cos(\pi y)\pi^3 \\ &-\cos\Big(\cos(\pi y)\Big)\sin(\pi y)\pi^3| \\ &\le \pi^3+3\pi^3+\pi^3=5\pi^3. \end{aligned}$$

Daher liefert die Fehlerdarstellung für die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} |f(x)-T_{1,f}(x)| &\le \tfrac{2\pi^2}{2!}|x-1|^2, \\ |f(x)-T_{2,f}(x)| &\le \tfrac{5\pi^3}{3!}|x-1|^3. \end{aligned}$$

Für $1\le x\le 2$ bekommt man daher

$$|f(x)-T_{1,f}(x)|\le\pi^2,\quad |f(x)-T_{2,f}(x)|\le\frac{5\pi^3}{6}.$$

Aufgabe 3

Die binomische Formel lautet

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Ableitung nach x gibt

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Einsetzen von $x=1$ liefert schließlich

$$n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Aufgabe 4

(i) Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x.$$

(ii) In den lokalen Extrema (leider nicht nur da) ist sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ Null. Aus

$$3x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ und } 2xy = 0$$

folgt ($x = 0$ und $y^2 = 1$) oder ($y = 0$ und $3x^3 = 1$). Also 4 (VIER!) Kandidaten für Extrema,

$$(0,1), \quad (0,-1), \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), \quad (\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0).$$

Es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \pm 1) = 0$. Also ist in den Punkten $(0, \pm 1)$ kein Extremum.

In $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ positiv (mit Wert $\frac{6}{\sqrt{3}}$) und

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y})^2$$

positiv (Wert 4). Für $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ negativ (mit Wert $\frac{-6}{\sqrt{3}}$) und Δ hat den Wert 4. Daher ist $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ Minimum und $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ Maximum.

Aufgabe 5

(i) Es gilt $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z^3 = z \cdot z^2 = 1$, wie (komplexe) Rechnung ergibt. $(M, \cdot)$ ist daher die zyklische Gruppe der Ordnung 3. Die Gruppentafel ist

$\cdot$	1	z	z^2
1	1	z	z^2
z	z	z^2	1
z^2	z^2	1	z

(ii) Es gilt

$\underline{k}_6$	$\underline{0}_6$	$\underline{1}_6$	$\underline{2}_6$	$\underline{3}_6$	$\underline{4}_6$	$\underline{5}_6$
$\Phi(\underline{k}_6)$	1	z	z^2	1	z	z^2

Daher

$$Im(\Phi) = \{1, z, z^2\} = M, \quad Kern(\Phi) = \{\underline{0}_6, \underline{3}_6\}.$$

Aufgabe 6

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $t^2 - t - 6$ sind

$$t_1 = 3 \quad \text{und} \quad t_2 = -2.$$

Daraus folgt

$$a_n = C_1 3^n + C_2(-2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $C_1, C_2, \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingungen ergeben

$$\begin{array}{ll} a_0 = 3 & = C_1 + C_2 \\ a_1 = 4 & = 3C_1 - 2C_2 \end{array} \implies C_1 = 2,\ C_2 = 1.$$

Daraus folgt

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n, \quad n \in \ \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 7

(i) Der Graph G ist zusammenhängend, weil je zwei Knoten durch einen Weg miteinander verbunden sind. G enthält keinen Kreis, denn je zwei Knoten auf dem Kreis sind durch zwei verschiedene Wege auf dem Kreis (einmal linksherum, einmal rechtsherum) miteinander verbunden. G ist also zusammenhängend und kreisfrei, also Baum.

(ii) Der Graph ist kein Baum, denn er enthält den Kreis

$$\{4,5\}\ \{5,7\}\ \{7,6\}\ \{6,4\}.$$

Aufgabe 8

(i) falsch, denn z.B. $\underline{2}_{10}$ ist ein Nullteiler und hätte $\underline{2}_{10}$ ein inverses Element $\underline{2}_{10}^{-1}$, dann folgte aus $\underline{5}_{10} \cdot \underline{2}_{10} = \underline{0}_{10}$ der Widerspruch

$$\underline{5}_{10} = \underline{5}_{10} \cdot (\underline{2}_{10}\underline{2}_{10}^{-1}) = (\underline{5}_{10}\underline{2}_{10}) \cdot \underline{2}_{10}^{-1} = \underline{0}_{10}\underline{2}_{10}^{-1} = \underline{0}_{10}.$$

(ii) wahr, denn alle $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ sind Ringe.

(iii) wahr, denn $\mathbb{Z}_3[x]/\langle\, p\,\rangle$ ist Körper mit 9 Elementen, wenn p ein nicht-faktorisierbares Polynom in $\mathbb{Z}_3[x]$ vom Grad 3 ist.

(iv) falsch, denn Abzählen ergibt 10 Tripel vom Typ $(4, n_2, n_3)$ mit $4 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$, 6 Tripel vom Typ $(3, n_2, n_3)$ mit $3 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$, 3 Tripel vom Typ $(2, n_2, n_3)$, nämlich $(2,2,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1)$, und schließlich noch das Tripel $((1,1,1)$. Zusammen nur 20 derartige Tripel.

(v) wahr, denn die einzigen linearen Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$ sind x und $x+1$. Die quadratischen Polynome, die durch x oder $x+1$ teilbar sind, sind x^2, x^2+x und $(x+1)^2 = x^2+1$. Das Polynom x^2+x+1 ist nicht dabei, also nicht faktorisierbar.