Mathematik für Informatiker II
Aufgaben der Klausur am 4. Oktober

Aufgabe 1:

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$ ist. Berechnen Sie, falls es existiert,

$$\int_0^1 \ln(x)dx.$$

(ii) Berechnen Sie Ober- und Untersummen von $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ bzgl. der äquidistanten Zerlegung $\{\frac{k}{n} \mid k = 0, \ldots, n\}$. Was folgt für $n \to \infty$?

Tipp: Sie dürfen ohne Beweis die Formeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{benutzen.}$$

7 Punkte

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin\Big(\cos(\pi \cdot x)\Big).$$

(i) Berechnen Sie für $n = 1, 2$ das Taylorpolynom T_n von f im Punkt $x_0 = 1$.

(ii) Bestimmen Sie unter der Verwendung der Fehlerdarstellung

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad y \in (x_0, x),$$

für $n = 1$ und $n = 2$ jeweils eine Abschätzung für

$$\max_{x \in (1,2)} \Big| f(x) - T_n(x) \Big|.$$

7 Punkte

Aufgabe 3:
Beweisen Sie ohne vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3 Punkte

Aufgabe 4:
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^3 + x \cdot y^2 - x$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

(ii) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

5 Punkte

Aufgabe 5:
Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und

$$M := \{z, z^2, 1\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie den Kern und das Bild des Gruppenhomomorphismus

$$\phi : (\mathbb{Z}_6, +) \to (M, \cdot) \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{k}_6) = z^k, \quad k = 0, \ldots, 5.$$

5 Punkte

Aufgabe 6:
Ermitteln Sie eine explizite Form der rekursiv definierten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 = 3, \qquad a_1 = 4, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

3 Punkte

Aufgabe 7:

(i) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$ Knoten, bei dem je zwei Knoten durch genau einen Weg miteinander verbunden sind. Zeigen Sie, dass G ein Baum ist.

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ und

$$E = \Big\{\{1,2\}, \{3,1\}, \{2,4\}, \{7,9\}, \{8,9\}, \{9,10\}, \{9,12\}, \{12,11\}, \{13,12\}, \{5,4\}, \{7,5\}, \{4,6\}, \{7,6\}\Big\}.$$

Ist G ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort.

5 Punkte

Aufgabe 8: Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

		wahr	falsch
(i)	$(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	( )	( )
(ii)	$(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ ist ein Ring.	( )	( )
(iii)	Es gibt Körper mit 9 Elementen.	( )	( )
(iv)	Es gibt 35 Tripel (n_1, n_2, n_3) mit $4 \geq n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$.	( )	( )
(v)	Das Polynom $x^2 + x + 1$ ist nicht faktorisierbar in $\mathbb{Z}_2[x]$.	( )	( )

5 Punkte