Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dr. M. Charina

Dortmund, 31.07.2007

Fachprüfung Mathematik II
am 18. Juli 2007
Lösungen

Aufgabe 1

$f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x-3)}$ ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ und ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$.

<u>In $x = 1$</u> gilt

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Also ist f in $x = 1$ stetig ergänzbar.

<u>In $x = 3$</u> gilt

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty.$$

Also ist f in $x = 3$ nicht stetig ergänzbar.

Die Funktion $h(x) = \dfrac{x}{2x + \sin 3x}$ ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>In $x = 0$</u> gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2+3\cos 3x} = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+3\cos 3x} = \frac{1}{5}.$$

Also ist h in $x = 0$ stetig ergänzbar.

Aufgabe 2

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\ln(x)\cdot x^{-1}\Big)' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}, \\ f''(x) &= -\frac{3}{x^3} + 2\cdot\frac{\ln(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -3.$$

Es gilt dann

$$T_2 f(x) = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2}.$$

(ii) z.z.: Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass $\left|\frac{\ln(x)}{x}\right| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Es gilt $e^x > x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, d.h. $x > \ln(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Damit ist $\frac{\ln(x)}{x} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 3

(i) Substitution $\quad t = 1 + e^{2x}, \quad dt = 2e^{2x}dx$. Damit

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

(ii) Mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\cdot \ln(x)dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(\ln(x)(-\frac{1}{x})\Big|_1^a + \int_1^a \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\ln(a)}{a} - \frac{1}{x}\Big|_1^a\right) \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\frac{1}{a}}{1} - \frac{1}{a} + 1\right) = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$S_3 = \left\{id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

(i) $\mathrm{Kern}(\phi) = \{\sigma \in S_3 \mid \phi(\sigma) = \underline{0}_2\} = \left\{id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$

(ii) Die Nebenklassen von $\mathrm{Kern}(\phi)$ nach Lemma 6.1.15 und Definition 6.1.14 sind

$$\sigma \circ \mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Kern}(\phi) \circ \sigma = \{\sigma \circ y \mid y \in \mathrm{Kern}(\phi)\},$$

d.h. die Nebenklassen sind

$$\mathrm{Kern}(\phi) \quad \text{und} \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 5

(i) Wegen $P(1,1) = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
P(7,4) &= P(6,3) + P(3,4) = P(5,2) + P(3,3) = P(4,1) + P(3,2) + 1 \\
&= P(3,0) + P(3,1) + P(2,1) + P(1,2) + 1 \\
&= P(2,0) + P(2,1) + P(1,0) + P(1,1) + 1 = 3.
\end{aligned}$$

(ii) P(7,4).

(iii) $P(7,4) + P(7,3) + P(7,2) + P(7,1) = 11.$

Aufgabe 6

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $t^2 - 2t - 2 = 0$ sind

$$t_1 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad t_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Daraus folgt

$$a_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit $C_1, C_2, \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingungen ergeben

$$\begin{array}{ll} a_0 = 0 & = C_1 + C_2 \\ a_1 = \sqrt{3} & = C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) \end{array} \implies C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^n - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^n, \quad n \in \ \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 7
(i) s. Musterlösung Aufgabe H50.

(ii) Der Graph G ist ein Eulergraph, denn er besitzt die geschlossene Euler-Tour

$$\{1,2\}\ \{2,3\}\ \{3,4\}\ \{4,2\}\ \{2,5\}\ \{5,4\}\ \{4,1\}.$$

G kann man in zwei Kreise zerlegen: $\{1,4\}\ \{4,2\}\ \{2,1\}$ und $\{5,2\}\ \{2,3\}\ \{3,4\}\ (4,5\}$

Aufgabe 8

(i) falsch; (ii) wahr ; (iii) wahr; (iv) falsch; (v) falsch.