Name, Vorname: ____ Matrikel-Nr.: ______________

Unterschrift: ____ Platznummer: ______________

Klausur Mathematik für Informatiker II

18.Juli 2007

Vorbemerkungen:

1) Bitte benutzen Sie einen schwarzen oder blauen Stift, allerdings **keinen** Bleistift.

2) Vervollständigen Sie unbedingt sorgfältig die Angaben am Kopf dieses Titelblatts. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, die Lösung selbständig ohne Hilfe Dritter angefertigt zu haben. Halten Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.

3) Zur Klausur sind keine Hilfsmittel mit Ausnahme von Taschenrechnern zugelassen. Bitte beachten Sie, dass nach der aktuellen Rechtsprechung bereits das Mitführen von Handys u. ae. bereits als Betrugsversuch gewertet wird.

4) Erlaubt ist nur ein selbsterstelltes DINA4-Blatt.

5) Schreiben Sie bei jeder Aufgabe Ihre Lösung auf das jeweilige Aufgabenblatt. Sie dürfen auch die Rückseite des Aufgabenblatts benutzen und ggf. die angehängten Zusatzblätter.

6) Selbst wenn Sie bei Aufgaben 1–7 die richtige Lösung notiert haben, aber wenn nicht erkennbar ist, wie Sie zu dieser Lösung gekommen sind, dann können wir Ihre Lösung nicht als richtig bewerten.

7) Die Klausur ist bestanden, wenn von den 40 erreichbaren 16 Punkte erzielt wurden.

8) Die Klausurergebnisse werden am 25. Juli am Schwarzen Brett im Mathetower gegenüber von der Pförtnerloge ausgehängt.

9) Klausureinsicht ist am 30. Juli, 10 - 12 Uhr im Raum 511 im Mathetower.

Bitte hier nichts eintragen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Max. Punkte	5	7	5	6	3	7	3	4	40
Erreicht									

Note: ______________________

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 1: Geben Sie für jede der drei Funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}, \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{x}{2x + \sin 3x}$$

alle Punkte in $\mathbb{R}$ an, in denen sie stetig ist.

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(i) Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom T_3 für f an der Stelle $x_0 = 1$.

(ii) Zeigen Sie, dass $f \in O(1)$ für $x \to \infty$.

Tipp: Sie dürfen ohne Beweis die Ungleichung $e^x > x$ für $x > 0$ benutzen.

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie existieren,

$$\text{(i)} \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 4:
Seien $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Z}_2, +)$ zwei Gruppen und $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \underline{0}_2 & , \quad \operatorname{sign}(\sigma) = 1, \\ \underline{1}_2 & , \quad \operatorname{sign}(\sigma) = -1, \end{cases} \qquad \sigma \in S_3.$$

(i) Geben Sie alle $\sigma \in \operatorname{Kern}(\phi)$ an.

(ii) Geben Sie alle Nebenklassen von $\operatorname{Kern}(\phi)$ an.

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 5:
Die Rekursionsformel für die arithmetischen Partitionszahlen lautet

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $P(0,0) = 1$ und $P(n,k) = 0$ für $k = 0$ und $n > 0$ sowie $k > n$.

(i) Berechnen Sie $P(7,4)$.

(ii) Auf wie viele verschiedene Arten kann man sieben gleiche Kugel in vier gleiche Schalen verteilen?

(iii) Auf wie viele verschiedene Arten kann man sieben gleiche Kugel in vier gleiche Schalen verteilen, falls manche der Schalen leer bleiben dürfen?

3 Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 6:
Ermitteln Sie eine explizite Form der rekursiv definierten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8 \quad \text{und} \quad a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 7:

(i) Zeigen Sie, dass jeder Eulergraph in endlich viele Kreise zerlegt werden kann, sodass jede Kante genau in einem Kreis vorkommt.

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und

$$E = \Big\{\{1, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass G ein Eulergraph ist und zerlegen Sie ihn wie in (i).

Punkte

Name, Vorname: Platznummer:

Aufgabe 8: Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

		wahr	falsch
(i)	Die Gruppen D_4 und S_4 sind isomorph.	( )	( )
(ii)	Die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ besteht aus Zyklen $(124)(3)$	( )	( )
(iii)	Der Graph $G = (V, E)$ mit der Adjazenzmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Wald.	( )	( )
(iv)	Die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +)$ wird von jedem Element außer der Null erzeugt.	( )	( )
(v)	Die Gruppe $(\{a, b, c, d\}, \circ)$ mit	( )	( )

$\circ$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

ist zyklisch.

$\boxed{\text{5 Punkte}}$

Name, Vorname: Platznummer:

Zusatzblatt: