

Lösung der Aufgaben der Klausur vom 1.10.2009

Aufgabe 1:

(i) Berechnen Sie $I_0 := \int_0^\infty e^{-x} dx$.

(ii) Finden Sie eine Formel für

$$I_n := \int_0^\infty x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

die kein Integralsymbol enthält. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(i) Bei $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x} dx$ kennt man eine Stammfunktion:

$$I_n = \lim_{N \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^N = - \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N} - (-e^0) = 0 + 1 = 1.$$

(ii) Partielle Integration mit $u(x) = x^n$ und $v'(x) = e^{-x}$ gibt

$$I_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x^n e^{-x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left([-x^n e^{-x}]_0^N - \int_0^N nx^{n-1}(-e^{-x})dx \right) = nI_{n-1}.$$

Induktionsbehauptung: $I_n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang $n = 0$: Nach (i) gilt $I_0 = 1 = 0!$

Induktionsvoraussetzung: $I_{n-1} = (n-1)!$

Induktionsschluss: $I_n = nI_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!$

Aufgabe 2:

Beweisen Sie $\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)^2$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Nach Formel 4.2.22 gilt

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z).$$

Daher

$$e^{3i\alpha} = \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha).$$

Der Realteil von $e^{3i\alpha}$ ist also $\cos(3\alpha)$. Andererseits

$$e^{3i\alpha} = \left(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \right)^3 = \cos(\alpha)^3 + 3i \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 - i \sin(\alpha)^3.$$

Der Realteil von $e^{3i\alpha}$ ist also andererseits auch

$$\cos(\alpha)^3 - 3 \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)^2.$$

Aufgabe 3:

Finden Sie für die auf der offenen Menge $\Omega := (0, \infty) \times (0, \infty)$ definierten Funktion f mit $f(x, y) = xy + 8\frac{x+y}{xy}$ die größtmögliche Zahl $A \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) \geq A \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega.$$

Gibt es ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) \leq B \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega?$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen der Funktion f ,

$$f(x, y) = xy + 8\frac{x+y}{xy} = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x},$$

sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y - \frac{8}{x^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x - \frac{8}{y^2}.\end{aligned}$$

Auf dem Rand von Ω ist entweder $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x = \infty$ oder $y = \infty$. Nähert man sich also aus dem Inneren von Ω irgendwie an den Rand, so wächst f über alle Grenzen. Somit kann es keine obere Schranke B ,

$$f(x, y) \leq B \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega,$$

geben.

Es gibt höchstens im Inneren (lokale) Extrema. Ist $(a, b) \in \Omega$ ein lokales Extremum von f , dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= b - \frac{8}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= a - \frac{8}{b^2} = 0.\end{aligned}$$

Substituiert man $a = \frac{8}{b^2}$ in $b - \frac{8}{a^2} = 0$, dann bekommt man

$$b - \frac{b^4}{8} = 0,$$

Wegen $(a, b) \in \Omega$ ist $b > 0$, also $\frac{b^3}{8} = 1$. Einzige positive Lösung ist $b = 2$. Damit folgt $a = 2$. Einzig mögliches lokales Extremum daher in $(2, 2) \in \Omega$. Die Hessematrix in einem beliebigen $(x, y) \in \Omega$ ist

$$\begin{pmatrix} 16x^{-3} & 1 \\ 1 & 16y^{-3} \end{pmatrix}.$$

In $(2, 2)$ ist die Hessematrix also $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es liegt daher ein Minimum vor. Man bekommt somit für alle $(x, y) \in \Omega$

$$f(x, y) \geq f(2, 2) = 12.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Gruppe (G, \circ) mit genau sechs Elementen, a, b, c, d, e, f . Vervollständigen Sie die zugehörige Gruppentafel.

\circ	a	b	c	d	e	f
a	c		a		f	
b				e		
c			c			
d		a				c
e	d					
f				c		d

Lösung:

Einzigste Möglichkeit für das neutrale Element ist c . Also bekommt man sofort

\circ	a	b	c	d	e	f
a	c		a		f	
b			b	e		
c	a	b	c	d	e	f
d		a	d			c
e	d		e			
f			f	c		d

In jeder Zeile und Spalte darf jedes Element nur genau einmal auftreten. Darum ist $a \circ d = b$, $a \circ f = e$, $f \circ b = e$ usw.

\circ	a	b	c	d	e	f
a	c	d	a	b	f	e
b	f	c	b	e	d	a
c	a	b	c	d	e	f
d	e	a	d	f	b	c
e	d	f	e	a	c	b
f	b	e	f	c	a	d

Aufgabe 5:

(i) Berechnen Sie

$$\Phi(n) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

für $n = 1, 2, \dots, 7$.

(ii) Welches Bildungsgesetz erfüllen die $\Phi(n)$ vermutlich? Beweis?

Lösung:

(i) Rechnung gibt

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \binom{1}{0} &&= 1 \\ \Phi(2) &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} &&= 1 + 1 = 2 \\ \Phi(3) &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} &&= 1 + 2 = 3 \\ \Phi(4) &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} &&= 1 + 3 + 1 = 5 \\ \Phi(5) &= \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} &&= 1 + 4 + 3 = 8 \\ \Phi(6) &= \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} &&= 1 + 5 + 6 + 1 = 13 \\ \Phi(7) &= \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} &&= 1 + 6 + 10 + 4 = 21 \end{aligned}$$

(ii) Die Folge der Zahlen $\Phi(n)$ scheint dem Bildungsgesetz

$$\Phi(n) + \Phi(n+1) = \Phi(n+2) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

zu gehorchen. Dies zeigt man mit Fallunterscheidung, n gerade oder ungerade.

Ist n gerade, dann ist $n+1$ ungerade. Man bekommt

$$\begin{array}{r} \Phi(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1} + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \\ \Phi(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}} \\ \hline \Phi(n) + \Phi(n+1) = 1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{\frac{n}{2}+2}{\frac{n}{2}} + 1 = \Phi(n+2). \end{array}$$

Hierbei wurde $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k}{k}$ und $\binom{k}{\ell} + \binom{k}{\ell+1} = \binom{k+1}{\ell+1}$ für beliebige $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq k$, ausgenutzt.

Ist n ungerade, dann ist $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ und $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2} + 1$. Man bekommt entsprechend zum Fall n gerade

$$\begin{array}{r} \Phi(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}} \\ \Phi(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} \\ \hline \Phi(n) + \Phi(n+1) = 1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}+1} = \Phi(n+2). \end{array}$$

Aufgabe 6:

Die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi_1 : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\{\pm 1, \pm i\}, \cdot), \quad \varphi_1(k) := i^k \\ \varphi_2 : (\mathbb{R}^3, +) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, +), \quad \varphi_2(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}\end{aligned}$$

sind Gruppenhomomorphismen. (Das braucht nicht bewiesen zu werden!)

- (i) Bestimmen Sie die Kerne von φ_1 und φ_2 .
- (ii) Bestimmen Sie das Bild von φ_2 .
- (iii) Bestimmen Sie das zu $-i$ gehörige Element von $\mathbb{Z}/\text{Kern}(\varphi_1)$ und das zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ gehörige Element von $\mathbb{R}^3/\text{Kern}(\varphi_2)$.

Lösung:

(i) Der Kern eines Homomorphismus' $\varphi : G \rightarrow G'$ ist die Menge der Urbilder des neutralen Elements e' von G' , also die Menge $\varphi^{-1}(e')$. Das neutrale Element von $(\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$ ist 1. Also

$$\varphi_1^{-1}(1) = \{4 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}.$$

In $(\mathbb{R}^2, +)$ ist das neutrale Element $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Kern von φ_2 ist daher die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}2x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 0 \\ -1x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Das Bild von φ_2 ist der ganze \mathbb{R}^2 , weil es zwei linear unabhängige Bildvektoren gibt, z.B.

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wegen $i^3 = -i$ ist $3 + 4\mathbb{Z}$ das zu $-i$ gehörige Element von $\mathbb{Z}/\text{Kern}(\varphi_1)$. Das zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ gehörige Element ist die Lösungsmenge des linearen inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}2x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 3 \\ -1x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -4\end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 7:

Die Rekursionsformel für die arithmetische Partition lautet

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $P(0, 0) = 1$ und $P(n, 0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $P(n, k) = 0$ falls $k > n$.

- (i) Berechnen Sie $P(6, 3)$.
- (ii) Auf wieviel verschiedene Weisen lassen sich sechs gleiche Kugeln auf drei (gleiche) Schalen verteilen?
- (iii) Auf wieviel verschiedene Weisen lassen sich sechs gleiche Kugeln auf drei (gleiche) Schalen verteilen, wenn man zulässt, dass auch Schalen leer bleiben dürfen?

Lösung:

(i) Die arithmetische Partition $P(n, k)$ gibt die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen von n in k positive (ganzzahlige) Summanden an, wobei zwei Zerlegungen als gleich angesehen werden, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden. Man findet schnell die Zerlegung der 6 in 3 Summanden:

$$6 = 4 + 1 + 1, \quad 6 = 3 + 2 + 1, \quad 6 = 2 + 2 + 2.$$

Also $P(6, 3) = 3$. (Man hätte natürlich auch die Rekursion ausrechnen können...)

- (ii) Gefragt ist hier wieder nach der Zahl $P(6, 3)$. Also auch Antwort 3.
- (iii) Hier muss man 0 als Summanden zulassen. Also die drei ebengenannten Fälle und

$$6 + 0 + 0, \quad 5 + 1 + 0, \quad 4 + 2 + 0, \quad 3 + 3 + 0.$$

Insgesamt also 7 Fälle.

Aufgabe 8:

Wir bezeichnen hier mit R die Menge aller Polynome, die sich als Rest bei der Polynomdivision durch $x^2 + 1$ ergeben. R ist ein Ring (Bitte nicht beweisen!)

- (i) Berechnen Sie das zu $2x^4 - x^3 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ gehörige Element $p \in R$.
- (ii) Bestimmen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus $s(x), t(x) \in \mathbb{Q}[x]$, so dass

$$s(x)(2x^4 - x^3 - 1) + t(x)(x^2 + 1) = 1.$$

- (iii) Werten Sie die Polynome $2x^4 - x^3 - 1$, $p(x)$ und $s(x)$ in der komplexen Zahl i aus.
- (iv) Wie lautet das multiplikative Inverse zu p im Ring R ?

Lösung:

R besteht aus allen Polynomen vom Typ $a + bx$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

- (i) Die Polynomdivision $(2x^4 - x^3 - 1) : (x^2 + 1)$ gibt

$$2x^2 - x - 2 \quad \text{Rest } p(x) = x + 1.$$

(ii) Der erweiterte Euklidische Algorithmus gibt

$$\begin{array}{c|c|c}
 s(x) & t(x) & r(x) \\
 \hline
 1 & 0 & 2x^4 - x^3 - 1 \\
 0 & 1 & x^2 + 1 \\
 1 & -2x^2 + x + 2 & x + 1 \\
 1 - x & 2x^3 - x^2 + 3x + 2 & 2
 \end{array}$$

Also

$$s(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \quad t(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

(iii) Es gilt

$$2i^4 - i^3 - 1 = 1 + i = p(i), \quad s(i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(iv) Das multiplikativ Inverse $q \in R$ von $p \in R$ ist definiert durch

$$q(x)p(x) = 1 \in R.$$

Das Produkt $q(x)p(x)$ muss also bei Division durch $x^2 + 1$ den Rest 1 ergeben,

$$q(x)p(x) = \tilde{p}(x)(x^2 + 1) + 1.$$

Wir wissen aber schon

$$s(x)p(x) = -t(x)(x^2 + 1) + 1.$$

Also $q(x) = s(x)$ (und $-t(x) = \tilde{p}(x)$).

Probe: $q(i)p(i) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(i + 1) = 1.$