

Übungsblatt 4 - Musterlösung

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Seien $g(x) := f(x, 0)$ und $h(y) := f(0, y)$ und $f_s(x) = f(x, s \cdot x)$, wobei $s > 0$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ in 0 ein Minimum haben.
- (ii) Untersuchen Sie f_2 und f_1 auf lokale Extrema und geben Sie zu jedem an, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
- (iii) Beweisen Sie, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in einer ε -Umgebung von $(0, 0)$ findet mit $f(x_1, y_1) > 0$, $f(x_2, y_2) < 0$.

(i) $g(x) = (0 - x^2)(0 - 3x^2) = 3x^4$, $h(y) = (y - 0^2)(y - 3 \cdot 0^2) = y^2$
Dass diese beiden Funktionen in 0 ein Minimum haben, darf als bekannt vorausgesetzt werden.

(ii) $f_2(x) = (2x - x^2)(2x - 3x^2) = 4x^2 - 8x^3 + 3x^4$.

Untersuche die Ableitungen:

$$f_2'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 8x = 12x(x^2 - 2x + \frac{2}{3}), \quad f_2''(x) = 36x^2 - 48x + 8$$

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f_2''(0) = 8 > 0, \quad f_2''(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) = 8 - 24\sqrt{\frac{1}{3}} = 8 - 8\sqrt{3} < 0$$

$$f_2''(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) = 8 + 8\sqrt{3} > 0$$

f_2 hat also Minima in 0 und $1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ und ein Maximum in $1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$f_1(x) = (x - x^2)(x - 3x^2) = x^2 - 4x^3 + 3x^4,$$

$$f_1'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2x = 12x(x^2 - x + \frac{1}{6}), \quad f_1''(x) = 36x^2 - 24x + 2$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$f_1''(0) = 2 > 0, \quad f_1''(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}) = 6 - 48\sqrt{\frac{1}{12}} = 6 - 4\sqrt{12} < 0$$

$$f_1''(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}) = 6 + 4\sqrt{12} > 0$$

f_1 hat also Minima in 0 und $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ und ein Maximum in $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Bemerkung: Jede der Funktionen $f_s(x)$ stellt den Querschnitt von $f(x, y)$ in einer Richtung dar. Jede von ihnen hat in $x = 0$ ein lokales Minimum. Trotzdem ergibt sich durch Teil (iii), dass $(0, 0)$ *kein* lokales Minimum von $f(x, y)$ ist.

(iii) Für (x_1, y_1) gibt es viele Möglichkeiten, z. B. $x_1 = \frac{\varepsilon}{2}, y_1 = 0$, damit $f(x_1, y_1) = \frac{3}{2}\varepsilon^4 > 0$.

Um (x_2, y_2) zu finden, muss man wissen, an welchen Stellen $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ negativ ist.

Ein Produkt zweier Faktoren aus \mathbb{R} ist negativ, wenn einer der Faktoren negativ, der andere positiv ist.

Also: Für $y > x^2 \wedge y < 3x^2$ ist $f(x, y) < 0$. (Der Fall $y < x^2 \wedge y > 3x^2$ ist ausgeschlossen.) Insbesondere gilt dies für $y = 2x^2$, denn

$f(x_2, y_2) = -x_2^4 < 0$ für jedes $x \neq 0$.

Wenn man $y_2 = 2x_2^2$ wählt, muss nur x_2 klein genug sein, damit

$|(x, y)| = \sqrt{x_2^2 + (2x_2^2)^2} < \varepsilon$ bleibt; z. B. $x_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ für $\varepsilon < 1$.

(Nachprüfen: $\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + (2\frac{\varepsilon^2}{4})^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{4\varepsilon^4}{16}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}{4}} \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon$)

Weil $f(0, 0) = 0$ ist und f in jeder Umgebung von $(0, 0)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt, kann $(0, 0)$ kein lokales Extremum von f sein.

Aufgabe 2:

(3 Punkte)

Berechnen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) := 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2.$$

Notwendige Bedingung:

$$\text{grad } f(x) = (6x^2 - 6x, 6y^2 + 6y) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge (y = 0 \vee y = -1).$$

Prüfe nun die Hessematrix:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & 12y + 6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Hf(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten der Hessematrizen:

$$|Hf(0, 0)| = -36, |Hf(1, 0)| = 36, |Hf(0, -1)| = 36, |Hf(1, -1)| = -36;$$

also hat f nach Satz 4.3.34 in $(0, 0)$ und $(1, -1)$ keine Extrema.Der erste Eintrag in der Hessematrix zu $(0, -1)$ ist -6 , also negativ. Darum ist $(0, -1)$ ein lokales Maximum. Analog ist $(1, 0)$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Sei $f(x, y) := x^2 + \frac{y^2}{3} - 1$, $g(x, y) := 2x^2 - \frac{1}{y}$ und $(x_0, y_0) := (1, 1)$.

(i) Berechnen Sie für f und g das lineare Taylorpolynom im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) .

(ii) Errechnen Sie die Koordinaten x_1 und y_1 der gemeinsamen Nullstelle dieser beiden Taylorpolynome.

(iii) Berechnen Sie entsprechend die linearen Taylorpolynome zu f und g im Entwicklungspunkt (x_1, y_1) und deren gemeinsame Nullstelle (x_2, y_2) .

(i) Lineares Taylorpolynom einer Funktion mit zwei Veränderlichen:

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

In diesem Fall: $\text{grad } f(x, y) = (2x, \frac{2}{3}y)$, $\text{grad } g(x, y) = (4x, \frac{1}{y^2})$. Damit:

$$T_{f,1}((x, y), (1, 1)) = \frac{1}{3} + 2 \cdot (x - 1) + \frac{2}{3} \cdot (y - 1) = 2x + \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}.$$

Analog:

$$T_{g,1}((x, y), (1, 1)) = 1 + 4 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) = 4x + y - 4.$$

(ii) Für die gemeinsame Nullstelle muss gelten:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{3}y - \frac{7}{3} &= 0, \\ 4x + y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem. Lösung ist

$$x = \frac{1}{2}, y = 2.$$

(iii) Dieselbe Prozedur nochmal mit $(\frac{1}{2}, 2)$ statt $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} T_{f,1}((x, y), (\frac{1}{2}, 2)) &= x + \frac{4}{3}y - \frac{31}{12}, \\ T_{g,1}((x, y), (\frac{1}{2}, 2)) &= 2x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem lautet jetzt

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{31}{12} \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

und hat die Lösung $x_2 = \frac{65}{116} \approx 0.5603448276$, $y_2 = \frac{44}{29} \approx 1.5172413793$

Dies ist das *zweidimensionale Newtonverfahren*. Der Sinn des eindimensionalen Verfahrens war ja, eine Nullstelle einer Funktion zu approximieren. In diesem Fall geht es um zwei Funktionen in zwei Veränderlichen. Jede dieser Funktionen hat eine Nullstellenmenge, nämlich $N_f = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + \frac{y^2}{3} = 1\}$ und $N_g = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{2x^2}\}$. Dieses Verfahren hilft, einen Schnittpunkt von N_f und N_g zu approximieren.

Für alle Interessierten: N_f ist eine Ellipse um $(0, 0)$ durch die Punkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm \sqrt{3})$, N_g ist der Graph der Funktion $\frac{1}{2x^2}$.

Diese beiden Mengen haben vier Schnittpunkte (w_k, s_k) , $k = 1 \dots 4$ mit $s_1 = s_2 = 2 \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{-3}{4}))$, $s_3 = s_4 = -2 \cos(\frac{1}{3} \arccos(\frac{-3}{4}) + \frac{\pi}{3})$ und $w_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2s_1}}$, $w_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2s_3}}$

Ungefähre Werte: $(\pm 0.600979; 1.384367)$ und $(\pm 0.946709; 0.557875)$.

Die Folge, die das zweidimensionale Newtonverfahren mit Startpunkt $(1, 1)$ liefert, konvergiert gegen $(w_1, s_1) = (0.600979; 1.384367)$.

Aufgabe 4:

(4 Punkte)

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

(i) Berechnen Sie für $n = 2 \dots 10$ den Wert der Summen

$$O_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad U_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

(ii) Skizzieren Sie die Funktion f . Gegen welchen Wert konvergieren O_n und U_n und warum?

$$(i) O_2 = \frac{1}{2}(f(1) + f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0.9330127$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.4330127$$

$$O_3 = \frac{3+\sqrt{8}+\sqrt{5}}{9} \approx 0.89605501$$

$$U_3 = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{9} \approx 0.56272168$$

$$O_4 = \frac{4+\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{7}}{16} \approx 0.87392727$$

$$U_4 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{7}}{16} \approx 0.62392727$$

$$O_5 \approx 0.85926221$$

$$U_5 \approx 0.65926221$$

$$O_6 \approx 0.84882909$$

$$U_6 \approx 0.68216242$$

$$O_7 \approx 0.84102155$$

$$U_7 \approx 0.69816441$$

$$O_8 \approx 0.83495479$$

$$U_8 \approx 0.70995479$$

$$O_9 \approx 0.83010190$$

$$U_9 \approx 0.71899079$$

$$O_{10} \approx 0.82612958$$

$$U_{10} \approx 0.72612958$$

(ii) Die Funktion f stellt den oberen Rand des Einheitskreises dar. Darum bildet diese Funktion zwischen 0 und 1 einen Viertel-Einheitskreis. O_n und U_n sind die Flächen unter einer Treppenfunktion, die im Intervall $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ jeweils den Wert $f(\frac{k}{n})$ bzw. $f(\frac{k+1}{n})$ hat. Weil f streng monoton fallend ist, ist dies für O_n der höchste und für U_n der niedrigste Wert im Intervall $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, jeweils multipliziert mit der Breite des Intervalls.

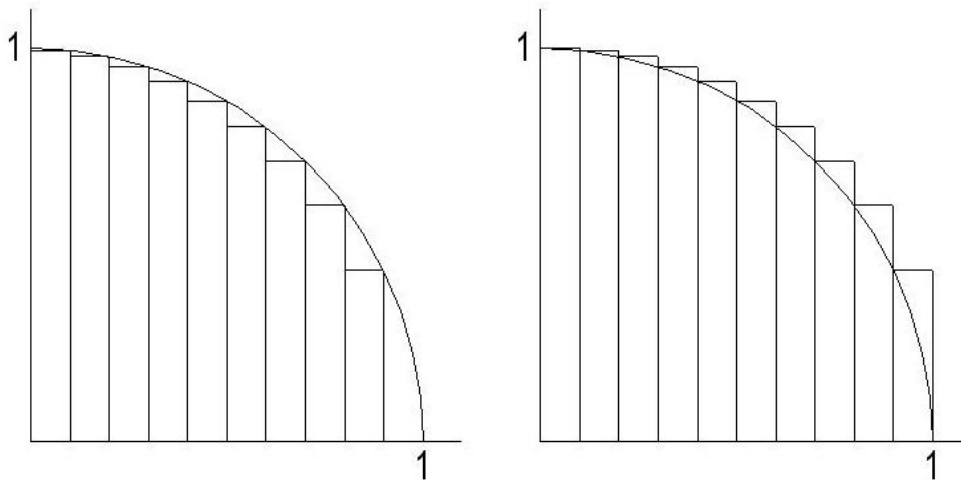


Abb. 1 Der Graph der Funktion f
 links: mit unterer Treppenfunktion
 rechts: mit oberer Treppenfunktion

Darum sind U_n und O_n jeweils Unter- bzw. Obersumme der Funktion f im Intervall $[0, 1]$. Die Fläche, die diese Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt, ist genau ein Viertel der Fläche des Einheitskreises. Die Folge der Untersummen ist streng monoton wachsend, die der Obersummen streng monoton fallend, die Differenz ist immer $\frac{1}{n}$, geht also gegen Null. Darum konvergieren beide Summen tatsächlich, und weil die Fläche des Viertelkreises immer größer ist als U_n und kleiner als O_n , müssen U_n und O_n gegen den Inhalt dieser Fläche ($\frac{\pi}{4} \approx 0,785398$) konvergieren.