Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.Math. Peter Knorr

Dortmund, 14.12.2007

Probeklausur Mathematik für Informatiker
Lösungen

Aufgabe 1
Real- und Imaginärteile komplexen Zahlen sind immer reelle Zahlen!
a ist der Realteil, b der Imaginärteil von $z = a + b \cdot i$.
Beispiel: i $(= 0 + 1 \cdot i)$ hat die reelle Zahl 0 als Realteil und 1 als Imaginärteil.

(i) Wegen $i^4 = 1$ gilt

$$i^{123} = i^{4\cdot 30+3} = (i^4)^{30} \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

(ii) Es gilt $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$. $z := \sqrt{i}$ ist eine komplexe Zahl mit $z^2 = i$. Der Ansatz $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ führt daher auf

$$\cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 \cdot i = r^2(\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi))$$

also $r^2 = 1$ ($\implies r = 1$ wegen $r > 0$) und

$$\cos(2\varphi) = 0, \quad \sin(2\varphi) = 1.$$

Einzige Lösungen in $[0, 2\pi)$ sind $\varphi = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4} \hat{=} 225°$, also

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \text{ und } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i.$$

Aufgabe 2
Das naive Vorgehen führte hier am schnellsten zum Ziel. Rechnung ergibt

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 4 \bmod 13\} = \{4,\ 17,\ 30,\ 43,\ 56,\ 69,\ 82,\ 95,\ 108, \ldots\}$$

und

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 9 \bmod 11\} = \{9,\ 20,\ 31,\ 42,\ 53,\ 64,\ 75,\ 86,\ 97, 108, \ldots\}.$$

Daher ist $n = 108$ die kleinste Lösung.

Lösungsweg nach Vorlesung:
13 und 11 sind relativ prim. Wir berechnen daher

$$M = 13 \cdot 11 = 143, \quad \tilde{m}_1 = \frac{M}{13} = 11, \quad \tilde{m}_2 = \frac{M}{11} = 13.$$

Mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus (oder durch scharfes Hinsehen) erhalten wir

$$6 \cdot 11 + (-5) \cdot 13 = 1,$$

also $u = 6$ und $v = -5$. Dann

$$c_1 \equiv 4 \cdot 6 \equiv 11 \bmod 13$$
$$c_2 \equiv 9 \cdot (-5) \equiv 10 \bmod 11$$

Eine Lösung ist daher $c_1 \cdot \tilde{m}_1 + c_2 \cdot \tilde{m}_2 = 121 + 130 = 251$. Die kleinste Lösung ist

$$n = 251 - M = 108.$$

Aufgabe 3
Die i-te ungerade Zahl ist $2i - 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Daher ist die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Beweis mit vollständiger Induktion:
$\underline{n = 1}$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2$. Also gilt $A(1)$.
$\underline{n \Longrightarrow n+1}$: Es gelte $A(n)$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Also gilt dann auch $A(n+1)$.

Aufgabe 4
(i) Es gilt offenbar

$$p_1(1) = p_1(1)$$

also $p_1 \sim p_1$, d.h., $\sim$ ist *reflexiv*. Entsprechend gilt

$$p_1(1) = p_2(1) \iff p_2(1) = p_1(1).$$

Also gilt $p_1 \sim p_2 \iff p_2 \sim p_1$, d.h., $\sim$ ist *symmetrisch*. Wegen

$$p_1(1) = p_2(1) \wedge p_2(1) = p_3(1) \Longrightarrow p_1(1) = p_3(1)$$

gilt auch $p_1 \sim p_2 \wedge p_2 \sim p_3 \Longrightarrow p_1 \sim p_3$, d.h., $\sim$ ist *transitiv*. Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.
(ii) Die Polynome vom Grad 0 sind die konstanten Polynome $\neq 0$. (Weil das Nullpolynom keinen Grad ≥ 0 besitzt - man definiert manchmal als Grad des Nullpolynoms -1 oder eine genügend grosse negative Zahl - muss das Nullpolynom extra genannt werden, wenn man *alle* konstanten Polynome meint.)
Eine Äquivalenzklasse $[p]$ für $\sim$ ist definiert als

$$[p] := \{q \in M \mid q \sim p\} = \{q \in M \mid p(1) = q(1)\}.$$

In $[p]$ liegt also das konstante Polynom

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = p(1) + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \in M$$

und es gibt kein anderes konstantes Polynom in $[p]$. Daher bilden die konstanten Polynome ein Repräsentantensystem.

Aufgabe 5
(i) Es gelten die Kommutativgesetze

$$X \cap Y = Y \cap X \quad \text{und} \quad X \cup Y = Y \cup X$$

und die Morganschen Regeln

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad \text{und} \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$$

nach einem Satz der Vorlesung. (Man muss nicht erwähnen, dass es sich dabei um Satz 1.2.9 handelt.)
Daher folgt zunächst nach den Morganschen Regeln

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$$

und weiter mit den Kommutativgesetzen

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

(ii) (a) Es gilt $B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cup B = A$, denn zum einen ist $B \subseteq A \cup B$, wenn also $A \cup B = A$ gilt, folgt $B \subseteq A$. Zum andern ist $A \cup B$ die kleinste Obermenge, die A und B enthält. Wenn $B \subseteq A$ gilt, ist es A selbst.
(b) Es gilt $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$, denn zum einen ist $A \cap B \subseteq B$, wenn also $A \cap B = A$ gilt, folgt $A \subseteq B$. Zum andern ist $A \cap B$ die größte Untermenge, die Elemente enthält, welche zu beiden Mengen gehören. Wenn $A \subseteq B$ gilt, ist A diese Menge.
(c) $A \setminus B = A$ bedeutet, dass kein Element von B in A liegt. Also $A \cap B = \emptyset$.