Klausur zur Mathematik für Informatiker I
am 4. April 2009
Musterlösung

Aufgabe 1:

Was ist das multiplikative Inverse zu 47 in $\mathbb{Z}_{137}$?

Lösung:
Schema des Euklidischen Algorithmus

137	47	r	q
1	0	137	
0	1	47	2
1	-2	43	1
-1	3	4	10
11	-32	3	1
-12	35	1	-

Also $-12 \cdot 137 + 35 \cdot 47 = 1$. Daher ist 35 das multiplikative Inverse zu 47 in $\mathbb{Z}_{137}$.
Test: $35 \cdot 47 - 12 \cdot 137 = 1645 - 1644 = 1$ ✓

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

erst in $\mathbb{R}$, dann in $\mathbb{Z}_5$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I, III-2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich in $\mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $x_3 = 0, x_2 = 2, x_1 = -1$.

In $\mathbb{Z}_5$ umgewandelt, sieht das Gleichungssystem folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+4\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier lautet die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3:

Sei $\preceq$ eine Relation auf $\mathbb{C}$ mit

$w \preceq z \Leftrightarrow |w| < |z| \vee (|w| = |z| \wedge \arg(w) \leq \arg(z))$.

Ist $\preceq$ eine Halbordnung auf $\mathbb{C}$?

Lösung:

Man prüfe die Eigenschaften nach:

- Reflexivität: $z \preceq z$ gilt, weil $|z| = |z| \wedge \arg(z) \leq \arg(z)$ ✓
- Antisymmetrie: Es gilt $(z \preceq w \wedge w \preceq z) \Rightarrow (|z| = |w| \wedge \arg(z) = \arg(w)) \Rightarrow z = w$ ✓
- Transitivität: Es gelte $z \preceq w \wedge w \preceq t$. Dann gibt es folgende vier Möglichkeiten:

  (i) $|z| < |w| \wedge |w| < |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

  (ii) $|z| = |w| \wedge |w| < |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

  (iii) $|z| < |w| \wedge |w| = |t| \Rightarrow |z| < |t| \Rightarrow z \preceq t$ ✓

  (iv) $|z| = |w| \wedge |w| = |t|$, wobei dann $\arg(z) \leq \arg(w) \wedge \arg(w) \leq \arg(t)$ gelten muss. Daraus folgt $|z| = |t| \wedge \arg(z) \leq \arg(t) \Rightarrow z \preceq t$ ✓

Fazit: $\preceq$ *ist* eine Halbordnung auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4:

(i) Finden Sie w mit $\frac{-w+3}{2w-2i} = i$. Schreiben Sie w hierbei in der Form $a + i \cdot b$.

(ii) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = -1$.

Lösung:

(i) $\frac{-w+3}{2w-2i} = i \Leftrightarrow -w+3 = i\cdot(2w-2i) = 2iw+2 \Leftrightarrow 1 = w\cdot(2i+1) \Leftrightarrow w = \frac{1}{2i+1} = \frac{-2i+1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{-2}{5}\cdot i$

(ii) Es gilt bekanntlich $|-1| = 1$ und $\arg(-1) = \pi$. Durch die dritte Wurzel ändert sich der Betrag 1 nicht, darum gilt für jede Lösung $|z| = 1$
Das Argument wird bei der dritten Wurzel durch 3 dividiert, also $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$. Weil das Argument von -1 auch durch $3\ \pi, 5\ \pi, 7\ \pi \ldots$ ausgedrückt werden könnte, ergeben sich zusätzliche Lösungen mit $\arg(z) = \frac{3\cdot\pi}{3} = \pi, \arg(z) = \frac{5\cdot\pi}{3}, \arg(z) = \frac{7\cdot\pi}{3}$ etc. . Aber weil $\frac{7\cdot\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ ist, ergibt sich derselbe Winkel. Darum gibt es genau die drei Lösungen z_1, z_2, z_3 mit $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}, \arg(z_2) = \pi, \arg(z_3) = \frac{5\pi}{3}$, wobei $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Alternativer Ansatz mit kartesischen Koordinaten: Sei z eine Lösung von $z^3 = -1$. Schreibt man $z = a + ib$, dann gilt $z^3 = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3 i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3) \cdot i = -1 + 0 \cdot i$. Der Vergleich der Realteile gibt $(a^3 - 3ab^2) = -1$, der Vergleich der Imaginärteile $(3a^2b - b^3) = 0$. Damit:
$3a^2b - b^3 = b(3a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee 3a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = \pm\sqrt{3} \cdot a$. Und diese Ergebnisse setzt man in die Gleichung $(a^3 - 3ab^2) = -1$ ein!

Fall 1: $b = 0 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$ wegen $a \in \mathbb{R}$.
Fall 2: $b = \sqrt{3} \cdot a \Rightarrow a^3 - 9a^3 = -8a^3 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Fall 3: $b = -\sqrt{3} \cdot a \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Die Lösungen lauten also $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, z_2 = -1, z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

Aufgabe 5:

Seien $\mathscr{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und
$\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ geordnete Basen von $V = \mathbb{R}^3$.

Die lineare Abbildung φ_A habe die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathscr{E}$.

Berechnen Sie ${}_{\mathscr{B}}[\varphi_A]_{\mathscr{B}'}$.

Lösung:

Die erforderlichen Transformationsmatrizen sind $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Inversion der ersten Matrix liefert $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also muss man folgende Matrixmultiplikation durchführen:

$$
{}_{\mathscr{B}}[\varphi_A]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 12 \\ -6 & 4 & -11 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 6:

Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der Matrizen

$$
M(a_2, a_3, a_4) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.
$$

Beweisen Sie, dass $\mathfrak{M}$ mit der Matrixmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

Lösung:

$\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen bezüglich der Multiplikation, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2+b_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3+b_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4+b_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder kürzer ausgedrückt

$$M(a_2, a_2, a_4)M(b_2, b_3, b_4) = M(a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4).$$

Das Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{M}$ ist also wieder ein Element in $\mathfrak{M}$.

Gesetze nachprüfen:
Das **Assoziativgesetz** gilt bei Matrixmultiplikationen immer.
Neutrales Element der Multiplikation ist $M(0, 0, 0)$ wegen

$$M(a_2, a_2, a_4)M(0, 0, 0) = M(a_2, a_2, a_4) = M(0, 0, 0)M(a_2, a_2, a_4).$$

Und das **inverse Element** zu einer gegebenen Matrix $M(a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}$ ist einfach die Matrix $M(-a_2, -a_3, -a_4)$.
Die Verknüpfung ist auch **kommutativ**, weil die Elemente a_n und b_n werden addiert, und die Addition in $\mathbb{R}$ ist bekanntlich kommutativ.

Aufgabe 7:

$a_k = k^5 \cdot 5^k$, $b_k = \frac{k!}{2^{(k^2)}}$

(i) Prüfen Sie, ob die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergieren.

(ii) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

Lösung:

(i) Prüfe mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^5 \cdot 5^{k+1}}{k^5 \cdot 5^k} = 5 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^5 \geq 5 > 1 \Rightarrow \text{Reihe ist divergent.}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)! \cdot 2^{(k^2)}}{k! \cdot 2^{((k+1)^2)}} = \frac{k+1}{2^{2k+1}}$$

Nun benötigt man die (sehr grobe) Abschätzung $2^k \geq 1 + k$, die man durch vollständige Induktion oder die Formel von Bernoulli ($(1 + 1)^n \geq 1 + n$) gewinnt.

$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \cdots \leq \frac{2^k}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ Reihe ist konvergent.

(ii) Nun müssen die Kehrwerte gebildet werden: $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^5 \cdot 5^k}{(k+1)^5 \cdot 5^{k+1}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^5 \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{5}$

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{k! \cdot 2^{((k+1)^2)}}{(k+1)! \cdot 2^{(k^2)}} = \frac{2^{2k+1}}{k+1} = \frac{2}{k+1} \cdot (2^k)^k \geq \frac{2}{k+1}(k+1)^k = 2(k+1)^{k-1} \to \infty$$

Die Konvergenzradien sind also $\frac{1}{5}$ und ∞.

Aufgabe 8:

(i) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2, n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n}$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Lösung:

Zu (i) Vollständige Induktion über n:
IA: $m = n$:

$$\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{m-(m-1)}{m(m-1)} = \frac{1}{m^2 - m} = \sum_{k=m}^{m} \frac{1}{k^2 - k} \checkmark$$

(Wegen $m \geq 2$ findet keine Division durch 0 statt.)

IS: $n \to n+1$: Es gelte

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n}.$$

Dann ist

$$\sum_{k=m}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{m-1} - \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n+1} \checkmark$$

Zu Aufgabe 8(ii):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \checkmark$$