

Mathematik für Informatiker - Übungsblatt 14
Abgabe bis Montag, 02.02.09, 17.00 Uhr
in die Kästen im Mathe-Foyer

Aufgabe 1:

(5 Punkte)

(i) Beweisen Sie für $n \geq m \geq 2$

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{2(m^2 - m)} - \frac{1}{2(n^2 + n)}.$$

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe von (i)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4}.$$

(iii) Können Sie aus (i) bessere obere Schranken für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ herleiten?

Aufgabe 2:

(3 Punkte)

Sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen, so ist ihr Produkt definiert als

$(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Das Produkt zweier streng monoton fallender Folgen ist streng monoton fallend.

(ii) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist das Produkt beider Folgen ebenfalls eine Nullfolge.

(iii) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist das Produkt beider Folgen ebenfalls konvergent.

Aufgabe 3:

(6 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{k}}$ auf Konvergenz.

(ii) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{5^k}$, wobei $a_k = 1$ für ungerade k , $a_k = 2$ für gerade k .

Aufgabe 4:

(2 Punkte)

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert bekanntlich. Was passiert, wenn Sie auf Ihrem programmierbaren Rechner oder mit einer Ihnen zur Verfügung stehenden Software die Zahl

$$s := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

berechnen, wobei N die größte darstellbare ganze Zahl in Ihrem System ist? Bitte geben Sie nur s an und den verwendeten Taschenrechnertyp bzw. die verwendete Software.