Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dr. M. Charina

Dortmund, 10.02.2007

Mathematik I für Informatiker
Musterlösung für die Klausur

Aufgabe 1

(i) $z = \dfrac{3(i^2)^{15} - i \cdot (i^2)^9}{2i-1} = \dfrac{(-3+i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = \dfrac{5i+5}{5} \Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1,\ \mathrm{Im}(z) = 1$

(ii)

$$z = \sqrt{3} + i \quad \Longrightarrow \quad z = 2\Big(cos(\frac{\pi}{6}) + i\ sin(\frac{\pi}{6})\Big)$$
$$\Longrightarrow \sqrt{z} \quad = \quad \pm\sqrt{2}\Big(cos(\frac{\pi}{12}) + i\ sin(\frac{\pi}{12})\Big)$$

Daher hat die eine Wurzeln von $\sqrt{3} + i$

$$\text{Realteil } \sqrt{2}\ cos(\frac{\pi}{12}) \ \text{ und } \ \text{Imaginärteil } \sqrt{2}\ sin(\frac{\pi}{12})$$

und die andere

$$\text{Realteil } -\sqrt{2}\ cos(\frac{\pi}{12}) \ \text{ und } \ \text{Imaginärteil } -\sqrt{2}\ sin(\frac{\pi}{12}).$$

Aufgabe 2 Die erweiterte Matrix $[A \vdots b]$ wird auf Stufen-Form gebracht:

$$\begin{array}{rrrrcrr}
I & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 & \\
II & 2 & 4 & 0 & \vdots & -4 & II + (-2)I \\
III & 3 & 6 & -2 & \vdots & 0 & III + (-3)I \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & \vdots & -6 & \\
 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 & III + (-1/2)II \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & \vdots & -6 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 &
\end{array}$$

(i) $\mathrm{Rang}(A) = 2$, da die Matrix A nur 2 linear unabhängige Spalten hat

(ii) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\} = \{t(-2,1,0)^T \mid t \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow$
$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\} = \langle(-2,1,0)^T\rangle$

(iii) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = b\} = \{(-2,0,-3)^T + t(-2,1,0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-1}{2n^3-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n-1/n^3}{2-1/n^2+1/n^3} = 1/2$

(ii) Die Folge $a_n = (-1)^n(1-10/n)$, $n \in \mathbb{N}$, divergiert, da sie zwei Häufungspunkte 1 und -1 hat:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}\left(1-\frac{10}{2n}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1}\left(1-\frac{10}{2n-1}\right) = -1.$$

Aufgabe 4
z.z: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf K^n
Beweis: Seien $x, y, z \in K^n$. 1) $x \sim x$, da $Ax = Ax$; 2) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$, da $Ax = Ay \Longrightarrow Ay = Ax$; 3) $(x \sim y \wedge y \sim z) \Longrightarrow (Ax = Ay \wedge Ay = Az) \Longrightarrow (Ax = Az) \Longrightarrow x \sim z$.

z.z: $[x]_\sim = \{y \in K^n \mid Ay = Ax\}$, $x \in K^n$.
Beweis: Zu $x \in K^n$ ist $[x]_\sim = \{y \in K^n \mid x \sim y\} = \{y \in K^n \mid Ay = Ax\}$.

Aufgabe 5 $17 \cdot x = 1 \mod 73 \Longleftrightarrow$ es existiert $z \in \mathbb{Z} \ : \ 17 \cdot x + 73 \cdot z = 1$ und

i	s_i	t_i	r_i	$-q_i$
0	1	0	73	
1	0	1	17	4
2	1	-4	5	3
3	-3	13	2	2
4	7	-30	1	

$\Longrightarrow 17 \cdot (-30) + 7 \cdot 73 = 1 \Longrightarrow x = -30 \mod 73 \Longrightarrow x = 43 \mod 73$

Aufgabe 6 Die erweiterte Matrix $[A \vdots 0]$ auf Stufen-Form gebracht:

$$\begin{array}{rrrrcrr}
I & 1 & 2 & 2 & \vdots & 0 & \\
II & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & II+(-1)I \\
III & -2 & 2 & -1 & \vdots & 0 & III+2I \\
IV & -1 & -2 & -2 & \vdots & 0 & IV+I \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & 6 & 3 & \vdots & 0 & III+3II \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 0 & I+II \\
 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 &
\end{array}$$

Der Nullraum der Matrix wird also von $(2,1,-2)^T$ erzeugt. Der Spaltenraum hat somit die Dimension 2; und aus

$$2u_1 + u_1 - 2u_3 = 0$$

folgt, dass jedes der u_i Linearkombination der anderen zwei ist. Also

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad U = \langle u_1, u_3 \rangle, \quad U = \langle u_2, u_3 \rangle.$$

Aufgabe 7

I.A.: für $n = 2$ gilt $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

I.V.: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2 - k} = 1 - \frac{1}{m}$ für alle $m \in \{2, \ldots, n\}$

I.S.: z.z.: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Beweis:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k} + \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)} \overset{I.V.}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Aufgabe 8

(i) f ist nicht linear, da $f(0,1,0) + f(0,1,0) = (2,6,2) \neq (2,6,4) = f(0,2,0)$

(ii) f ist linear, da $f(ax+by) = 4(ax+by) = a4x+b4y = af(x)+bf(y)$ für alle $x, y, a, b \in R$

(iii) f ist nicht linear, da $f(0,0) \neq (0,0,0)$

(iv) f ist nicht linear, da $f(0,1,0) + f(0,1,0) = (0,2,0) \neq (0,1/2,0) = f(0,2,0)$