Klausur Mathematik für Informatiker I

10. Februar 2007

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Real- und Imaginäranteil der folgenden komplexen Zahlen

(i) $\frac{3 \cdot i^{30} - i^{19}}{2i-1}$

(ii) $\sqrt{\sqrt{3}+i}$

Aufgabe 2: Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren

(i) Rang(A)

(ii) eine Basis von $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\}$

(iii) alle Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Aufgabe 3: Entscheiden Sie, ob die folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2-1}{2n^3-n+1}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 - \dfrac{10}{n}\right)$

Aufgabe 4: Seien $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ und $x, y \in K^n$. Auf K^n ist die Relation $\sim$ definiert durch

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; A \cdot x = A \cdot y.$$

Überprüfen Sie, ob die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf K^n ist und geben Sie gegebenenfalls alle Äquivalenzklassen von $\sim$ an.

Aufgabe 5: Lösen Sie die Gleichung

$$17 \cdot x = 1 \mod 73.$$

Aufgabe 6: Sei

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

Geben Sie alle Teilmengen von $\{u_1, u_2, u_3\}$ an, die U aufspannen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Aufgabe 8: Welche der Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 3x_2, x_1 + x_2^2)$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iv) $f : (\mathbb{R} \setminus 0)^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \frac{1}{x_2}, x_3)$.