

Mathematik I für Informatiker
(Ergänzung)

H. Michael Möller

November 2006

Kapitel 1

Mengen, Abbildungen und Relationen

1.6 Rekursion und Induktion

Definition 1.6.1 Sei M eine Menge mit Halbordnung \preceq . Besitzt jede nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ ein kleinstes Element, dann nennt man \preceq eine *Wohlordnung* auf M .

Bemerkung. Das sogenannte *Wohlordnungsaxiom*¹ besagt folgendes. Ist M eine Menge mit Wohlordnung \preceq , dann besitzt M auch eine totale Ordnung. Dass dieses Axiom nicht bewiesen werden kann, zeigt die Grenzen der Wissenschaft. (Bei den vielen Versuchen, das Axiom zu beweisen, kam man nur darauf, dass es äquivalent ist zu anderen Axiomen, etwa zum Auswahlaxiom oder zum Zornschen Lemma. Letzteres hat nur aus historischen Gründen die irreführende Bezeichnung “Lemma” statt “Axiom”.)

Beispiel. Betrachte die ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit der natürlichen Ordnung \leq . Damit ist \mathbb{Z} total geordnet, aber nicht wohlgeordnet, denn etwa die Teilmenge aller negativen Zahlen ist nicht leer und hat kein kleinstes Element. \mathbb{Z} lässt sich jedoch wohlordnen mittels

$$a \preceq b \Leftrightarrow (|a| < |b| \vee |a| = |b|, a > 0)$$

denn hier gilt

$$0 \prec 1 \prec -1 \prec 2 \prec -2 \prec 3 \dots$$

¹Ein Axiom ist laut Wikipedia ein allgemein als gültig anerkannter Grundsatz, der nicht bewiesen werden muss.

Für positive n ist das Element $n \in \mathbb{Z}$ das $2n$ -te in dieser Reihung und $-n$ das $(2n + 1)$ -te. In einer Teilmenge $X \neq \emptyset$ von \mathbb{Z} ist dann das kleinste Element das mit der kleinsten Platzziffer.

Definition 1.6.2 Sei M eine Menge mit Halbordnung \preceq . (M, \preceq) heißt *fundiert*, wenn jede nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ (mindestens) ein minimales Element besitzt.

Bemerkung. Wohlgeordnete Mengen sind fundiert, denn das kleinste Element einer (Teil-)menge ist insbesondere ein minimales Element.

Satz 1.6.3 Eine halbgeordnete Menge (M, \preceq) ist genau dann fundiert, wenn jede absteigende Kette $K = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq M$,

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \dots,$$

endlich ist, d.h., es gibt ein $s \in \mathbb{N}$ mit $K = \{a_1, \dots, a_s\}$,

$$a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_s.$$

Beweis. Sei (M, \preceq) fundiert und K eine absteigende Kette. Dann besitzt K als nicht-leere Teilmenge von M ein minimales Element a^* . Wegen $a^* \in K$ ist $a^* = a_s$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Weil es minimal in K ist, gilt $a_s \succ a_i$ für kein $a_i \in K$, d.h., es gibt kein a_i mit $i > s$.

Ist (M, \preceq) nicht fundiert, dann gibt es eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$, die kein minimales Element besitzt. X ist damit notwendigerweise nicht endlich. Wähle jetzt $a_1 \in X$ beliebig. Weil a_1 nicht minimal in X ist, gibt es ein $a_2 \in X$ mit $a_2 \prec a_1$. Zu a_2 gibt es wiederum ein $a_3 \in X$ mit $a_3 \prec a_2$, denn a_2 ist nicht minimal in X usw. Man erhält eine nicht-abbrechende absteigende Kette $K = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq M$. \square

Beispiel (Fortsetzung). Wie das obige Beispiel zeigt ist (\mathbb{Z}, \preceq) eine wohlgeordnete Menge, insbesondere also eine fundierte Menge. Wegen der Numerierbarkeit der Elemente (Platzziffer!) hat eine absteigende Kette K , die mit $n > 0$ anfängt, höchstens $2n$ Elemente, denn n hat insgesamt in \mathbb{Z} nur $2n - 1$ Vorgänger bezüglich \preceq . Fängt die Kette K mit $-n < 0$ an, so ist aus dem gleichen Grund die Länge der Kette höchstens $2n + 1$.

Satz 1.6.4(Prinzip der fundierten Induktion)

Sei (M, \preceq) eine fundierte Menge und für jedes $m \in M$ sei $A(m)$ eine Aussage. $A(m)$ ist für alle $m \in M$ wahr, wenn die beiden folgenden Aussagen für alle $m \in M$ gelten.

- i)* Ist m minimal in M , dann ist $A(m)$ wahr.
ii) Wenn $A(m')$ für ein $m' \in M$ mit $m' \prec m$ wahr ist, dann ist $A(m)$ wahr.

Beweis. Sei

$$M_0 := \{m \in M \mid A(m) \text{ ist falsch} \}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Menge M_0 leer ist, wenn *i)* und *ii)* gelten. Damit ist dann der Satz schon bewiesen, denn wenn $M_0 = \emptyset$, dann ist $A(m)$ wahr für alle $m \in M$.

Wir führen den Beweis dadurch, dass wir M_0 als nicht leer annehmen, aber *i)* und *ii)* gelten und leiten aus diesen drei Aussagen (zwei davon sind wahr, die dritten nehmen wir als wahr an) eine falsche Aussage her. Nach den Gesetzen der Logik ist dann eine der drei Aussagen, hier also die Aussage $M_0 \neq \emptyset$, doch falsch².

Annahme: Die Menge M_0 ist nicht leer.

Weil (M, \preceq) fundiert ist, besitzt M_0 als nicht-leere (!) Teilmenge von M ein minimales Element m_0 . Wegen $m_0 \in M_0$ ist $A(m_0)$ falsch.

m_0 ist nicht minimal in M , denn nach *i)* ist für jedes $m \in M$, das minimal in M ist, die Aussage $A(m)$ wahr. Daher gibt es in M ein $m_1 \prec m_0$. Dieses m_1 liegt nicht in M_0 , denn dann wäre m_0 ja nicht in M_0 minimal. Somit ist $A(m_1)$ wahr nach Definition von M_0 . Jetzt greift *ii)* mit $m' := m_1$ und $m := m_0$ und gibt, dass $A(m_0)$ doch wahr ist. Das ist ein Widerspruch, denn wir haben schon gezeigt, dass $A(m_0)$ falsch ist. Somit ist die Annahme verkehrt gewesen. Es folgt $M_0 = \emptyset$ und die Behauptung des Satzes gilt. \square

Bemerkung. Mit Hilfe von Satz 1.6.4 kann man die Gültigkeit von Aussagen beweisen. Man nennt diese Beweistechnik *Prinzip der fundierten Induktion*. Ein Spezialfall davon ist die sogenannte *vollständige Induktion*, bei der an die Stelle der fundierten Menge die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen tritt. Die vollständige Induktion werden wir im nächsten Kapitel näher betrachten.

Im Satz 1.6.4 wird der Wahrheitsgehalt einer Aussage $A(m)$ bewiesen. Wenn mit dieser Aussage ein Funktionswert definiert wird, wenn $A(m)$ also lautet wie “*Die Funktion $g : M \rightarrow Y$ ist durch folgende Vorschrift ... an der Stelle $m \in M$ eindeutig beschrieben*”, dann liefert Satz 1.6.4, dass die Funktion $g : M \rightarrow Y$ für alle $m \in M$ definiert wird. Weil man bei dieser Art von Definition in *ii)* $A(m)$ nur auf Grund von vorher bestimmten Werten $A(m')$ bekommt, spricht man von einer *rekursiven Definition*.

²Diese Beweistechnik wird Widerspruchsbeweis genannt

Satz 1.6.5(Rekursionssatz für fundierte Mengen)

Sei (M, \preceq) eine fundierte Menge. M_1 sei die Menge der minimalen Elemente von M und Y eine beliebige Menge. Weiter seien

$$f : M \times Y \rightarrow Y, \quad g_1 : M_1 \rightarrow Y, \quad \text{und} \quad h : M \rightarrow M$$

mit $h(m) \prec m$ für alle $m \in M \setminus M_1$ Abbildungen. Dann ist die Abbildung $g : M \rightarrow Y$ eindeutig durch die folgenden zwei Vorschriften bestimmt.³

- i) $g(m) := g_1(m)$ für alle $m \in M_1$.
- ii) $g(m) := f(m, g(h(m)))$ für alle $m \in M \setminus M_1$.

Beweis. Zunächst einmal sei betont, dass die Voraussetzungen widerspruchsfrei sind, denn die Forderung $h(m) \prec m$ für alle $m \in M \setminus M_1$ wird durch beliebig viele Funktionen erfüllt, weil aus $m \in M \setminus M_1$ folgt, dass m nicht minimal in M ist, es also ein $m' \in M$ gibt mit $m' \prec m$. (Für $m \in M_1$ hätte man nicht $h(m) \prec m$ fordern können unter der Bedingung $h : M \rightarrow M$.)

Die Aussage $A(m)$ lautet:

“ $g(m)$ ist ein eindeutig bestimmtes Element aus Y .”

Durch die Vorschrift i) ist $g(m)$ für alle $m \in M_1$ eindeutig bestimmt, weil ja g_1 vorgegeben ist. Ist $m \in M \setminus M_1$, dann ist der Funktionswert $f(m, g(h(m)))$ eindeutig bestimmt und damit $g(m)$ auch im Fall $m \in M \setminus M_1$ nach ii). \square

Im Fall ii) steckt die eigentliche Rekursion. Zur Bestimmung von $g(m)$ brauchen wir $g(h(m))$, also den Wert von g an einer vorangegangenen Stelle. Hierfür war möglicherweise auch der Vorgängerwert $g(h(h(m)))$ erforderlich usw. Man spricht von der *Rekursionstiefe* n , wenn man zur Berechnung von $g(m)$ insgesamt n Vorgängerwerte mit Hilfe von ii) oder (am Ende) von i) bestimmt haben muss. Satz 1.6.3 gibt wegen $m \succ h(m) \succ h(h(m)) \succ \dots$, dass bei fundierten Mengen die Rekursionstiefe immer endlich ist.

Beispiel. Will man eine endliche Menge $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ sortieren in einer vorgegebenen totalen Ordnung, dann hat man in der theoretischen Informatik verschiedene Möglichkeiten. Eine davon wird als MERGESORT bezeichnet. Dabei teilt man die Menge X in zwei gleichgroße Mengen X_1 und X_2 wenn n gerade ist. (Bei ungeradem n enthält eine Menge ein Element mehr als die andere). Sind X_1 und X_2 schon sortiert, dann bekommt man

³Wir vermeiden bewusst den Begriff “berechenbar”, der in der theoretischen Informatik genauer behandelt wird. Mit “gegeben” oder “bestimmt” meinen wir hier nur, dass wir in einer eindeutigen Weise (irgendwie) den Funktionswert bekommen können.

die Elemente von X der Größe nach, indem man die kleinsten Elemente von X_1 und X_2 miteinander vergleicht, das kleinste der beiden als kleinstes von X aus X_1 bzw. X_2 entfernt, dann die kleinsten der jetzt aktuellen Mengen X_1 und X_2 vergleicht, damit das zweitkleinste von X erhält usw. Insgesamt braucht man höchstens $n - 1$ Vergleiche⁴ um der Reihe nach das kleinste, zweitkleinste, ..., zweitgrößte Element von X zu identifizieren.

Will man untersuchen, wie aufwändig dieses Sortierverfahren ist, muss man zählen, wie oft man zwei Elemente miteinander vergleicht. Sei $A(n)$ die Anzahl der nötigen Vergleiche, um eine beliebige n -elementige Menge mit MERGESORT zu sortieren. Dann gilt bei geradem n offenbar im ungünstigsten Fall

$$A(n) = n - 1 + 2A\left(\frac{n}{2}\right).$$

Ist n ungerade, so hat man höchstens

$$A(n) = n - 1 + 2A\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

denn eine Menge mit $\frac{n-1}{2}$ Elementen braucht nicht mehr Vergleiche als eine mit $\frac{n+1}{2}$ Elementen.

Hier hat man also eine rekursive Definition gemäß Satz 1.6.5, wenn man $A(n)$ für die minimalen Elemente n separat definiert. Hier ist die Menge der Argumente n die Menge der natürlichen Zahlen, also $M = \mathbb{N}$. Wenn wir $A(1)$ kennen, also die Anzahl der Vergleiche bei einelementigen Mengen, dann liefert uns die Rekursionsvorschrift eine obere Schranke für die Anzahl der Vergleiche $A(n)$. $A(1)$ ist 0, denn es sind keine Vergleiche möglich.

Um einen Eindruck zu bekommen, wie schnell $A(n)$ mit wachsendem n anwächst, wollen wir zumindest für den Fall, dass wir immer die Rekursionsvorschrift $A(n) = n - 1 + 2A\left(\frac{n}{2}\right)$ anwenden können, eine explizite Form für $A(n)$ beweisen. Sei also $n = 2^s$. Dann kommt man durch Probieren, etwa durch Ausrechnen von $A(1), A(2), A(4), A(8)$, zur Vermutung dass $A(2^s)$ übereinstimmt mit

$$B(s) := s2^s - 2^s + 1.$$

Die Aussage $A(2^s) = B(s)$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, ist wieder mit Satz 1.6.4 möglich. (Einfacher geht es mit der vollständigen Induktion im nächsten Kapitel!) \mathbb{N}_0 ist total geordnet mit \leq . Kleinstes (und einziges minimales) Element in \mathbb{N}_0 ist $s = 0$. Es gilt *i*) von Satz 1.6.4,

$$A(2^0) = A(1) = 0 = 0 \cdot 1 - 2^0 + 1 = B(0).$$

⁴wenn eine der Teilmengen vorzeitig leer ist, geht es schneller!

Für nicht-minimales s , also $s \geq 1$, nimmt man als Vorgänger s' die Zahl $s - 1 \geq 0$. Wenn also $A(2^{s-1}) = B(s - 1)$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} A(2^s) &= 2^s - 1 + 2B(s - 1) = 2^s - 1 + 2((s - 1)2^{s-1} - 2^{s-1} + 1) \\ &= 2^s - 1 + (s - 1)2^s - 2^s + 2 = B(s). \end{aligned}$$

Damit gilt auch *ii*) von Satz 1.6.4 und nach dem Satz ist für alle $s \in \mathbb{N}_0$

$$A(2^s) = s2^s - 2^s + 1.$$