

Mathematik I für Informatiker  
Testklausur

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

Sei  $(H, \circ, \text{id}, ^{-1})$  eine Untergruppe der Gruppe  $(G, \circ, \text{id}, ^{-1})$ . Zeigen Sie, dass  $\sim$  definiert durch

$$a \sim b : \iff a \circ b^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 2** (1+3 Punkte)

(i) Beweisen Sie für die Mengen  $A, B, C$ :

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

(ii) Was können Sie jeweils über die Mengen  $A, B$  aussagen, wenn gilt

$$\text{a) } A \cup B = A, \quad \text{b) } A \cap B = A, \quad \text{c) } A \setminus B = A.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 287 und 231 und stellen Sie ihn in der Form  $\text{ggT}(287, 231) = r \cdot 287 + s \cdot 231$  mit  $r, s \in \mathbb{Z}$  dar.

**Aufgabe 4** (1+1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

(i)  $z = (1 + 6i^3)(4 - i^7)$

(ii)  $(2 + 3i)z = (4 - 5i)$

**Aufgabe 5** (2+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie:  $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = n + 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 19, \quad f(n+2) = 2f(n+1) + 35f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$f(n) = 2 \cdot 7^n - (-5)^n.$$

**Aufgabe 6**

(1+3+1 Punkte)

Sei  $G = \{f : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\} : f \text{ bijektiv}\}$ .

- (i) Wie viele Elemente hat die Menge  $G$ ?
- (ii) Zu  $f, g \in G$  ist die Verknüpfung  $f \circ g \in G$  definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \text{für alle } x \in \{a, b, c\}.$$

Zeigen Sie, dass  $G$  mit der Verknüpfung  $\circ$  eine Gruppe ist

- (iii) Geben Sie eine Untergruppe der Gruppe  $(G, \circ, \text{id}, ^{-1})$  an, die mehr als ein Element besitzt.

**Aufgabe 7**

(2 Punkte)

Überprüfen Sie durch die Rechnung modulo 11 die Gültigkeit von

$$\frac{1234 \cdot 5678}{17} = 4122330.$$

**Aufgabe 8**

(3 Punkte)

Bestimmen Sie das kleinste  $x \in \mathbb{N}$ , das

$$\begin{aligned} x &= 3 \pmod{7} \\ x &= 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

erfüllt.

**Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 40% der Punkte erforderlich.**