

Mathematik I für Informatiker
 Musterlösung für die Probeklausur

Aufgabe 1 $(H, \circ, \text{id}, ^{-1})$ ist eine Untergruppe von $(G, \circ, \text{id}, ^{-1})$, also gilt 1) $\text{id} \in H$ und 2) $x^{-1} \in H$ für alle $x \in H$. Seien $x, y, z \in H$.

- Aus 1), 2) folgt $x \circ x^{-1} = \text{id} \in H \Rightarrow \sim$ ist reflexiv.
- $x \circ y^{-1} \in H \stackrel{1)}{\Rightarrow} (x \circ y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow y \circ x^{-1} \in H \Rightarrow \sim$ ist symmetrisch.
- $x \circ y^{-1} \in H \wedge y \circ z^{-1} \in H \Rightarrow x \circ y^{-1} \circ y \circ z^{-1} \in H \Rightarrow x \circ z^{-1} \in H \Rightarrow \sim$ ist transitiv.

Aufgabe 2

(i) $x \in \overline{A \cup (B \cap C)} \stackrel{\text{Satz 2.9 (f)}}{\iff} x \in \overline{A} \cap (\overline{B \cup C}) \stackrel{\text{Satz 2.9 (c)}}{\iff} x \in (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

(ii) a) z.z.: $((A \cup B) = A) \Leftrightarrow (B \subseteq A)$

„ \Rightarrow “ : Sei $x \in B \stackrel{\text{Def. 2.7 (ii)}}{\Rightarrow} x \in A \cup B \stackrel{(A \cup B) = A}{\Rightarrow} x \in A$. Also gilt $B \subseteq A$.

„ \Leftarrow “ : z.z.: $B \subseteq A \Rightarrow (A \cup B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cup B)$.

$x \in A \cup B \stackrel{\text{Def. 2.7 (ii)}}{\iff} x \in A \vee x \in B \stackrel{B \subseteq A}{\iff} x \in A$.

b) z.z.: $((A \cap B) = A) \Leftrightarrow (A \subseteq B)$

„ \Rightarrow “ : Sei $x \in A \stackrel{(A \cap B) = A}{\Rightarrow} x \in A \cap B \stackrel{\text{Def. 2.7 (i)}}{\Rightarrow} x \in B$, also gilt $A \subseteq B$.

„ \Leftarrow “ : z.z.: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B$.

$x \in A \cap B \stackrel{\text{Def. 2.7 (i)}}{\iff} x \in A \wedge x \in B \stackrel{A \subseteq B}{\iff} x \in A$.

c) z.z.: $((A \setminus B) = A) \iff (A \cap B = \emptyset)$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \iff A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 3

287	231	r	-q
1	0	287	-1
0	1	231	-4
1	-1	56	-8
-4	5	7	0

$\Rightarrow \text{ggT}(287, 231) = 7 = -4 \cdot 287 + 5 \cdot 231$.

Aufgabe 4

(i)

$$\begin{aligned}z &= (1 + 6i^3)(4 - i^7) \\ &= (1 - 6i)(4 + i) \\ &= 4 + i - 24i + 6 \\ &= 10 - 23i\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 10, \operatorname{Im}(z) = -23$$

(ii) $(2 + 3i)z = (4 - 5i) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}z &= \frac{4 - 5i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{8 - 12i - 10i - 15}{4 + 9} \\ &= \frac{-7 - 22i}{13}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{7}{13}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{22}{13}$$

Aufgabe 5

(i) I.A.: $n = 1: \prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 = 2$

I.V.: Gelte $\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{k}\right) = m + 1$ für $m \in \{2, \dots, n\}$

I.S.:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= (n+1) + 1\end{aligned}$$

(ii) I.A.: $n = 0: f(0) = 1 = 2 \cdot 7^0 - (-5)^0 = 1$

$$n = 1: f(1) = 19 = 2 \cdot 7 - (-5) = 19$$

I.V.: Gelte $2f(m-1) + 35f(m-2) = 2 \cdot 7^m - (-5)^m$ für $m \in \{2, \dots, n\}$

I.S.:

$$\begin{aligned}f(n+1) &= 2f(n) + 35f(n-1) \\ &\stackrel{\text{Def. von } f}{=} 2(2f(n-1) + 35f(n-2)) + 35(2f(n-2) + 35f(n-3)) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} 2(2 \cdot 7^n - (-5)^n) + 35(2 \cdot 7^{n-1} - (-5)^{n-1}) \\ &= 2 \cdot 7^{n+1} - (-5)^{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(i) Es ist $G = \{f_i : 1 \leq i \leq 6\}$ mit

x	a	b	c
$f_1(x)$	a	b	c
$f_2(x)$	a	c	b
$f_3(x)$	b	a	c
$f_4(x)$	b	c	a
$f_5(x)$	c	a	b
$f_6(x)$	c	b	a

Also hat G sechs Elemente.

(ii) $(G, \circ, f_1, {}^{-1})$ ist eine Gruppe, denn es gilt:

- $(f \circ g) \circ h = f(g(h)) = f \circ (g \circ h)$ für alle $f, g, h \in G$,
- $\text{id} = f_1$, da $f_1 \circ f_i = f_i \circ f_1 = f_i$ für alle $1 \leq i \leq 6$,
- $f_1^{-1} = f_1, f_2^{-1} = f_2, f_3^{-1} = f_3, f_4^{-1} = f_5, f_5^{-1} = f_4, f_6^{-1} = f_6$.

(iii) $H := \{\{f_1, f_3\}, \circ, f_1, {}^{-1}\}$ ist eine zweielementige Untergruppe von G . (H ist abgeschlossen bezüglich \circ , denn es gilt $f_3 \circ f_3 = f_1$.)

Aufgabe 7 Vergleiche hierzu Blatt 7, Aufgabe 28. Annahme: Es gilt $\frac{1234 \cdot 5678}{17} = 4122330$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 1234 \cdot 5678 = 17 \cdot 4122330 \pmod{11} \\ \Rightarrow & (-1 + 2 - 3 + 4) \cdot (-5 + 6 - 7 + 8) = (-1 + 7) \cdot (4 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + 0) \pmod{11} \\ \Rightarrow & 2 \cdot 2 = 6 \cdot 3 \pmod{11} \\ \Rightarrow & 4 = 18 \pmod{11} \\ \Rightarrow & 4 = 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch. Folglich ist die zu untersuchende Gleichung nicht gültig.

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{3}_{=:r_1} \pmod{\underbrace{7}_{=:m_1}} \\ x &= \underbrace{1}_{=:r_2} \pmod{\underbrace{13}_{=:m_2}} \end{aligned}$$

- $x_1 = 3$ erfüllt die erste Gleichung.
- $\text{ggT}(7, 13) = 1 = \underbrace{2}_{=:u_1} \cdot 7 - 1 \cdot 13$
- Multiplikation mit $r_2 - x_1 = -2$ ergibt $-2 = -4 \cdot 7 + 2 \cdot 13$.
- $\tilde{x}_2 = x_1 + (r_2 - x_1) \cdot u_1 \cdot m_1 = 3 + (-4) \cdot 7 = -25 \notin \{0, 1, \dots, 90\}$
- $x_2 = \tilde{x}_2 + 91 = 66$ ist das kleinste $x \in \mathbb{N}$, das die gegebenen Gleichungen erfüllt.

Probe: $x_2 = 66 = 3 + 63 = 3 \pmod{7}$ und $x_2 = 66 = 1 + 65 = 1 \pmod{13}$.