Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

WS 2008/09

17.10.2008

Mathematische Methoden des CAD

Blatt 1

Abgabe: in der Übung am 22.10.08

Aufgabe 1. Wir verwenden die übliche Notation von Punkten im affinen Raum $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren $\mathbf{p} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ mit kartesischen Koordinaten. Zeigen Sie: die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann affin, wenn ein Punkt $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ und eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren mit

$$\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{q}_0 + C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\mathbf{q}_0$ und C zu folgenden affinen Abbildungen an:

- Translation im $\mathbb{R}^2$ um den Vektor $(1,1)^T$,
- Rotation im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn,
- Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge eines (lösbaren) inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$, ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 3. Die 3 Punkte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ seien Ecken eines Dreiecks mit positivem Flächeninhalt (also auch eine affine Basis des $\mathbb{R}^2$). Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten

- der Ecken,
- der Seitenmitten,
- des Schwerpunkts

dieses Dreiecks. Beschreiben Sie die Wirkung einer affinen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ anhand dieser 7 Punkte.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es **keine** polynomiale Kurve gibt, die einen Kreisbogen vom Radius 1 parametrisiert.